الفهرس

مــقــدمــــة

هذا كتابٌ يعرض الميكانيكا وقوانينها، بقسميها الحركيين الكَيْنَمَاتيكا والدِّينَاميكا. يشمل كلّ قسمٍ دراسة حركة الجسيم أولاً ثمّ حركة نظام الجسيمات والجسم الجاسئ. وهو: نَصٌّ عربيٌّ تتخلله بعض المصطلحات العلمية الإنجليزية ومعادلاتٍ رياضيةٍ برموزٍ أجنبية (لاتينية وإغريقية) كُتِبَت من اليسار إلى اليمين. لذلك، يحوي الكتاب فيضاً غزيراً من المصطلحات العلمية كررت في طولِه وعرضِه، انطلاقاً من الحقيقة المعروفة بأنَّ اللّغة الإنجليزيّة تسود الساعة جُلَّ التيارات العلمية والمحافل الدولية.

لذلك، افترضت أن قارئ هذا الكتاب، هو على الأقل طالب اجتاز السنة الجامعية الأولى في الهندسة أو العلوم الطبيعية أو ما يعادلهما في المعاهد والكليات المتوسطة. وأنه يمتلك قاعدةً علميةً جيدةً في الرياضيات، وبالأخص في حقلي التفاضل والتكامل. كما أنه استوعب قواعد الفيزياء الأساسية بما فيها مبادئ نظرية الميكانيكا ضمن نظريات الفيزياء العظمى.

لقد استندت عند كتابته وحتى عند مراجعاته المتتالية إلى جمٍّ غفير من الكتب والمراجع المختلفة، الأجنبية بالأساس وباللغة الإنجليزية بالتحديد. كما لم يخْلُ الأمر من بعض الكتب المنشورة باللغة العربية هنا وهناك. بعض هذه الكتب نُشِر في الشرق العربي لمؤلفين عرب، وعددها قليل، وبعضها الآخر نُشر في الدُّوَلِ الأجنبية مترجماً من اللّغات المحلية لتلك البلدان إلى اللّغة العربيّة، وهذه لا تتجاوز أصابع اليد الواحدة. وفي الحقيقة، إن ما يجمع هاتين المجموعتين، المنشورة باللغة العربية والمترجمة هو اختلافها، اختلافٌ في التعريف وفي المُصْطَلَح. لقد جاء هذا الاختلاف نتيجةً لِتَوَزُّعِ دول المنشأ، وتنوُّع البيئات التي عاش فيها هؤلاء المؤلفون أو المترجمون، بدون أي جامع لهم، كمجمع لغةٍ عربيةٍ واحد يُوَحِّد كلَّ المصطلحات والرموز والتعاريف في كلِّ البلدان العربية، أو حتى في الشرق العربي. فجاءت المصطلحات وحتى الرموز مختلفةً. فمثلاً، كلمة الجاذبية المعروفة يقابلها الثِقالة في بلاد الشام والزَّخَم يقابله اندفاعٌ أو كمية الحركة، والقصور العَطالة والسرجهة السرعة المتَّجهة أو الاتِّجاهية والحفظ انحفاظاً، أمّا الكَيْنَمَاتيكا فعلم الحركة، والديناميكا علم التحريك. وأطرف ما في هذا السّياق تعريف الجسيم في سورية بالجزيئة وفي مصر بالنقطة المادية.

لذلك، اعتمدت ومنذ البداية على نشرات مَجْمعِ اللّغةِ العربيّةِ الأردنيُّ، وبالأخص الجزءُ الخاص بتعريب رموز ومصطلحات النظام الدّوليّ *SI* (المكثية م ك ث) للوَحَدَات. كما اعتمدت على كلٍّ من قاموس المورد ومعجم المصطلحات العلمية والفنية والهندسية للدكتور أحمد الخطيب للتأكد من باقي المصطلحات. لقد استخدمت الأرقام العربية مع وَحَدَات النظام الدّوليّ *SI* فقط انطلاقاً من الحقيقة بأن نزعةً تدريجيةً نحو استخدام هذا النظام تسود حقلي العلوم والهندسة اليوم.

على صعيدٍ آخر، لم يكن الكتاب ليخرج على صورته الحالية لولا مساهمة العديد من الأصدقاء في الطباعة والتصحيح العلمي واللغوي. فبفيضٍ من المشاركة الحانية قامت سوسن توتنجي بطباعته وترتيبه. كما أضاءت لي مناقشة البابين الأوليين مع المحاضر تيسير العاروري والباب السادس مع الدكتور عبد العزيز شوابكه أستاذي الفيزياء بجامعة بيرزيت جوانب مهمة على صعيد المراجعة العلمية والدقيقة للمفاهيم والمصطلحات التي وردت. وقد كرمني الكاتب سعيد مضيه بتصحيحه لغوياً. لجميع هؤلاء فضل صدوره بشكله الحالي ويبقى الخطأ مسؤوليتي وحدي.

أخيراً، إني لأرى هذا الكتاب مجرّد طبعةٍ تجريبية تحتاج إلى النقد والتقييم الرصين من كل قارئ له. كما آمل أن ينتفع به ومنه كل طلبة العلوم والهندسة في الجامعات والمعاهد المتوسطة ومعلمي العلوم الطبيعية في المدارس الثانوية في وطننا.

ملاحظات على النصّ

يأتي الكتابُ متسلسلاً في قسميه وشاملاً لعشرة أبواب وعدة ملاحق. وبدءً من البنود التمهيدية، يستند الكتاب إلى المتَّجِهات جنباً إلى جنب مع الطريقة التحليلية، وإلى حساب التفاضل والتكامل ولأنظمة إحداثياتٍ متنوعةٍ، رابطاً هذه الأنظمة مع بعض. وللمساعدة والفهم قسمت أبواب الكتاب إلى عددٍ من البنود والبنود الفرعية. وأضيف للكتاب عددٌ من الأسئلة المحلولة- 113 سؤالاً محلولاً بإسهاب، قسمٌ منها حلّ بأكثر من طريقة. وقد جاء بعض الأسئلة في سياق البنود الرئيسية من المتن كحلٍ مباشر على قانونٍ ورد للتو، أمّا أغلبها فورد في ختام كل باب، حيث يكون الحل أكثر تحدياً لشموله مواد من أكثر من بندٍ واحد وقد يزيد على ذلك.

لقد أُضيف للباب الأول قدرٌ محدود من المواد التاريخية، بيَّنَ تسلسل تطور علم الميكانيكا والديناميكا بشكلٍ خاص حتى اليوم. مستعرضاً فيه أثر الحضارة العربية الإسلامية على قضية الحركة وفيزياء الطبيعة. فآمل أن يكون جُلُّ هذه المواد التاريخية تاريخاً حقيقياً.

واشتمل الباب الثاني على وصفِ حركة الجسيم وحساب سرجهته وتسارعه لِنُؤَسِّسَ بذلك لكَينَماتيكا الجسم الجاسئ التي قُسمت حركته إلى أكثر من نوع، مع إبراز الأشهر من تلك الحركات- الانتقالية والدورانية والمستوية. وأُنْهِيَ هذا الباب بدراسة حركة الجسيم المركبة من الحركتين: النسبية والمكتسبة.

وتُعَرَّفُ في الباب الثالث قوانين نيوتن الكلاسيكية، وكذلك وَحَدَات القياس والأبعاد المستخدمة، وكُلُّ ذلك قبل أن نصل إلى تعريف المعادلة التفاضلية لحركة الجسم تحت تأثير القوى المعينة.

وفي الباب الرابع - الحركة المقيّدة للجسيم - تُعَرَّفُ فيه المعادلة التفاضلية للحركة المقيدة في الإحداثيات الديكارتية - طريقة لاجرانج وفي الإحداثيات الطبيعية - طريقة أويلر. وتَمَّ في ختامه التَّعَرُّفُ على مبدأ دالمبير للجسيم المقيد.

وقد عولجت في الباب الخامس- القوانين العامة لديناميكا الجسيم- ثلاث مجموعاتٍ من القوانين هي الزَّخَمُ والزَّخَمُ الزَّاويُّ والطاقة الحركية. وقسمت كلُّ مجموعةٍ من هذه المجموعات إلى قسمين منفصلين - قانون التَّغَيُّر وقانون الحِفْظ.

وكتطبيقٍ مباشرٍ على حفظِ الزَّخَمِ الزَّاويُّ جاء الباب السادس- حركة الجسيم تحت تأثير القوة المركزية، فَرُكِّز على قوة التربيع العكسي للجاذبية وقوانين كبلر للحركة الكوكبية. وكتطبيقٍ مباشرٍ لهذا الباب دُرِسَت حركة الأقمار الصناعية والمسارات الإهْلِيلْجِيَّة.

.... في الباب السابع - الحركة النسبية للجسيم، نُوقش الاستقرار والسكون النسبي للجسيم على سطح الأرض وحُسِبَ انحراف المقذوفة الناتج من دوران الأرض للحالتين: الساقطة من علٍ والمقذوفة العادية.

أمّا الباب الثامن، ديناميكا النظام والجسم الجاسئ فجاء زاخراً وضخماً، تَمَّ التّعَرفُ فيه على القوانين العامة والمعادلة التفاضلية لحركة النظام، ثُمّ حركة مركز كتلة النظام وقانون حفظ حركته. واتُّبع نفس التسلسل القائم في الباب الخامس فَدُرس الزَّخَمُ والزَّخَمُ الزَّاويُّ والطاقة الحركية بالنسبة لنظام الجسيمات والجسم الجاسئ. كما أُضيف إلى ذلك مبدأ دالمبير لنظام الجسيمات المقيد. وكتطبيقٍ مباشرٍ على حفظ الزَّخم لنظام الجسيمات تَمَّ استعراضُ مسألةٍ غايةٍ في الأهمية - حركة الجسم مُتَغيِّر الكتلة.

وكتطبيقٍ مباشرٍ على مجموعتي قوانين الزَّخم والزَّخم الزّاويّ لنظام الجسيمات نوقش التصادم في الباب التاسع. فَعُرِّفَت المعادلة الأساسية للحركة وحُدِّدَت الفروق بين التصادم المركزي المباشر والتصادم المائل، وأخيراً حُسبت الطاقة الحركية المفقودة نتيجة ذلك.

ويُختتم الكتاب بالباب العاشر، عناصر الهندسة التحليلية ومعادلات لاجرانج . فيتمُّ التعرف فيه على طريقٍ جديدٍ لحل المعادلـ(ات)ـة التفاضلية للحركة. ولأهمية ذلك في تطور نظرية الديناميكا التحليلية نُوْصِف رياضياً وتحليلياً القيود والأنظمة المقيدة وأنواعها مع تعريف مفاهيم الإزاحات الافتراضية والممكنة والشغل الافتراضي. وأخيراً، نتعرف على مبدأ لاجرانج دالمبير، قبل أن نصل إلى زبدة هذا الباب معادلات لاجرانج من النوع الثاني.

ويُرفق في القسم الأخير من الكتاب ملحقان وعِدَّةُ جداولَ رياضية. أحد هذه الملاحق للمتَّجِهات والآخر لعزوم القصور. أمّا الجداولَ: فأحدها لوَحَدَات النظام الدولي ***SI*** وآخرٌ للكمِّيات الفيزيائية المستخدمة في الكتاب مع وَحَدَاتِها الدولية، وثالثٌ ببعض المُشْتَقَّات، ورابعٌ ببعض أشهر التكاملات غير المحدودة. كما أضيفت للكتاب بعض الصيغ الرياضيِّة والهندسية - المثلثية الأكثر انتشاراً. واختتم الكتاب بفهرسٍ أبجديٍ شامل.

أود أن أُلْفِت نظر القارئ إلى أن كلَّ معادلةٍ أو تعبيرٍ أو صيغةٍ أجنبية ينبغي أن تُقرأ من اليسار إلى اليمين، مثلاً $\mathbf{F} = M\,\mathbf{a} + \mathbf{T}$ أو $\mathbf{a}_r = \mathbf{g} - 2\,w \times \boldsymbol{v}_r$، وهلّم جرّا. أمّا خلافُ ذلك فيُقرأ من اليمين إلى اليسار، مثلاً F = 10 نيوتن و x = 12 [م]......إلخ. وقد بَيَّنْتُ الوَحَدَات المستخدمة بين قوسين كبيرين [ ] إذا كانت مكونةً من رموز، أو كتابةً عاديةً تُرفق للعدد. فنقول F = 10 [ن]، أو F = 10 نيوتن، أو F = 10 [N] أو x = 12 متراً، أو x = 12 [م] أو x = 12[m]. ولعدم توفر الإمكانية الفنية والسهلة للطباعة العربية ارتأيت استخدام الرموز اللاتينية بين قوسين مع الكتابة العربية العادية. ولذلك، اعتمدت في طول الكتاب وعرضِه إحدى الصيغتين F = 10 [N] بالقوسين، أو F = 10 نيوتن بدون أية أقواس.

وقد وردت الأسئلة المحلولة في الكتاب، بصيغة **سؤال** م (رقم)، بينما حدد رقم الشكل المرافق للسؤال المحلول مكافئاً لرقم المسألة قيد البحث. ولقراءة أرقام الأبواب والبنود الفرعية وحتى المعادلات فيتم ذلك، بالعادة، من اليسار إلى اليمين. فمثلاً البند المبتدئ بالأرقام 1.4.2 يُقرأ واحد أربعة اثنين بدون ذكر النقاط الفاصلة بين هذه الأرقام. وهذا يعني أننا في البند الفرعي الأول من البند الرئيسي الرابع في الباب الثاني. كما تقرأ المعادلة 17.5 بالصيغة الوحيدة سبعة عشر خمسٌ كرقمٍ للمعادلة التي تلي ستة عشر معادلة وردت حتى لحظتها في الباب الخامس.

الباب
الأول

... ولا غرو، فإننا حتى اليوم، حين بتْنَا ننظر إلى الديناميكيات النيوتْنيَّة بمثابة جزءٍ من اللوحة الأعرض التي رسمتها نسبية أينشتاين، فإن معظمنا ما يزال مستمراً بالتفكير في الإطار النيوتني، وما تزال قوانين نيوتن تفي بغرض ارشاد رواد الفضاء إلى الطريق نحو القمر والكواكب (وهذا ماعبر عنه رجل الفضاء بل أندروز حين قال: لعل نيوتن يتولى معظم عملية القيادة الآن، (وذلك جواباً لسؤال ابنه عمن كان يقود سفينة الفضاء أبولو التي كانت تقل أباه الى القمر).

تِمْثي، فَرِس، **بلوغ سن الرشد في المجرة**، عمان:مركز الكتب الأردني، 1990: ص 208.

تطور الميكانيكا النظرية

يُعتبر تحديد بداية نشوء علم الميكانيكا من الأمور المثيرة للجدل حتى يومنا هذا. لكن الاحتمال الأقوى أن أولى المحاولات حدثت في القرن الرابع قبل الميلاد فى أثينا، حيث يُذكر أن الإغريقي **أرِسطو طاليس** Aristotle، 384- 322 ق.م، كان أول من استخدم كلمة 'μηχανη - تُقرأ ميخاني - ليقصد بها ما يعنى اليوم منشأةً أو آلةً وحتى اختراع. لقد عرّف **أرسطو** أيضاً مفهومين جديدين هما مفهوما الثقل والخفة للجسم، الثقيل يتجه نحو مركز الكون (الأرض)، بينما الخفيف يتجه أو حتى يصعد للسماء. وسَميّ هذه الحركة بالحركة الطبيعية للجسم، حيث أورد أمثلةً عليها منها أن الحجر يهوِي الى قعر الوادي بسبب ثقله، بينما يصعد الدخان الى السماء لخفته. هذا المفهوم الأرسطَوِي يَتناقض مع مفهوم الوزن الحالي، والذي عرفه بالصفات الطبيعية للجسم. وأشار **أرسطو** الى أنّ سرعة الجسم الساقط تتناسب طردياً مع صفتة الطبيعية (وزنه)، أمّا الحركة المنتظمة المستقيمة فقد عزاها إلى تأثير قوةٍ ثابتةٍ مؤثرةٍ على الجسم. وقد سادت هذه المفاهيم لفترة تتعدى الألفي سنة.

أحد العلماء الإغريق الذين أسهموا أيضاً في تطوّر ونُشوء علم الميكانيكا كان العالم **أرخميدس** Archimedes، 287- 212 ق.م، الذي بحث وأوجد شروط اتزان الرافعة تحت تأثير قوىً متعددةٍ مؤثرةٍ عليها. ثمّ طوَّر بالاعتماد على فراغ أُقلِيدِس الطريقة الهندسيـــة في الاســـتاتيكا، واكتشف النظرية المعروفة حتى الآن باسمه - نظرية الضغط على الجسم المغمور أو **قاعدة أرخميدس**.

لقد شقّ هؤلاء العلماء البدايات الأولى لتطور علم الميكانيكا، هذه البدايات كانت متعثرة وفرضيات، إلا أن بعض هذه الفرضيات قد ثبُت صحته.

بعد تلك الحِقبة الإغريقية ســادت الدولة الرومانية التي سيطرت على أجزاءَ كبرى من العالم القديم - القســم الأكبر من أوروبا وشــرق البحر المتوسط حتى القرن الســابع الميلادي. في تلك الفترة لم يطرأ أي تطورٍ يُذكر على العلوم والميكانيكا بشكل خاص.

ومع نُشوء وتطور الحضارة العربية الإسلامية، برز علماءٌ كثيرون في مجالاتٍ عدةٍ أثرَوا العلوم والميكانيكا بإسهامــاتٍ جمّةٍ. لقد تأخر اهتمام الباحثين المعاصرين بمنجزات العرب والمسلمين في ميدان الميكانيكا ربّما لتصنيفهم ايّاه ضمن علومٍ أخرى. إذ سمّى العرب علم الميكانيكا بعلم الحيل، وارتبط بقسم العلوم الطبيعية في الفلسفة العربية الإسلاميــة.

إنّ نقص المعرفة العلمية عن طبيعة تكوّن الأجرام السماويــة، وقوانين حركة النظام الكوني خارج الأرض، وأيضاً قوانين الطبيعة حتى طبيعة عالم الأرض بشكلٍ خاص، رافَقَه ونَتَج عنه، ثُمّ أثّرَ فيه وتَأثّــرَ به، غياب التطور التكنيكي الذي أفقد هذه المعرفة أداتــها العلمية الضرورية لاكتشاف قوانين الظاهرات الفلكية. لذلك لم يكن لها من وسيلةٍ موجودة غير الافتراضات المجردة. وحين بدأ علماء العرب والمسلمين يستجيبون لمتطلبات التطور الاقتصادي الاجتماعي فيطورون معرفتهم العلمية للطبيعة، توصلوا إلى إنشاء بعض الأجهزة التكنيكية الأولية، لرصد الفضاء وتطبيق النظريات الرياضية في قياس المسافات المكانية والزمانية كالحلقة الإعتدالية وذات الأوتار وذات السمت والمِزْوَلَة (الساعة) الشمسية والرقاص والإسطرلاب والجداول الفلكية وغيرها. لكن هذه الأجهزة كانت محدودة التأثير في حقل المعرفة لكونها محدودة النوعية والإمكانية[1].

هذا كلّه لم يجعل نُخبةً من العلماء والفلاسفة الطبيعيين العرب والمسلمين مقلِّدين للأولين في النظر إلى النظام الفلكي بشكل تام. هؤلاء خرجوا على الكثير من المســلّمات التقليدية التي كانت ســائدةً في فهم العالم. فكان **الفارابي** 872 - 950 و**أبو بكر الرازي** 854 - 932 وغيرهم قد مهّدوا الطريق **للبغدادي** و**ابن سينا** 980 - 1036 و**فخر الدين الرازي** المتوفى عام 1209 في ذلك، فأضافت ممارســــتهم النظرية والتطبيقية في فيزياء الطبيعة إمكانيةً جديدةً لمعالجة قضيــة الحركــة في الطبيعة. لقد عُولجت هذه القضية في أواخر القرن العاشر وأوائل القرن الحادي عشر حين لم يكن علم الميكانــيك قد نشأ بعد.

فابن سينا توصل نتيجة بحثِه الخاص في حركة الطبيعة الى فهم حركتها بشكلٍ دائري، أي عودتها إلى نقطة البدء. إن أساس فهمه للحركة الدائرية في الطبيعة هو إدراكه الذي توصل إليه بأنّ العالم مليءٌ بالمادة، أي أنه لا فراغ فيه وأن **الخَلاء** [†] محالٌ في الطبيعة . يقول **ابن سينا** في تنبيهه .....**وإذ قد تَبَيّن أن البُعد المتصل لا يقوم بلا مادة، وأن الأبعاد الجسمية لا تتداخل لأجل بُعديتها، فلا وجود لفراغٍ هو بــُعــدٌ صِرف. وإذا سَلكت هذه الأجسام في حركاتها تنَحّى ما بينها** أي زالت الأبعاد القائمة بينها، **ولم يَثْبُت لها بُعدٌ مفــطــور** أصيل **فلا خلاء** [2].

[†] يقصد بمفهوم الخلاء **الفضاء المطلق** مكانٌ ليس فيه متمكن، أي مكانٌ مجرد، نشأ كمفهومٍ فلسفيٍ يونانيٍ قديم من الاتجاه الذي يرى المكان هو بُعد. انظر العبيدي، حسن، **نظرية المكان في فلسفة ابن سينا**، بغداد: دار الشؤون الثقافية العامة،1987، ص 142.

إن فرضية نَفى الخلاء، الفضاء، في العالم المادي عند **ابن سينا** تتجاوز الفرضية الذّرية **لديموقريطُس** Democritus، القائلة بأن المادة مكونةٌ من الذرات والفضاء. والأخيرة هذه أخذ بها **نيوتن** فيما بعد، مضيفاً اليها أن الذرات تتحرك من الشمس الى الأرض عبر الفضاء. وقد حُسِمَ الخلاف على يد **أينشتاين** في الفيزياء المعاصرة، لِيُثبت الفرضية السينيوية بعدم وجود الفضاء المطلق [‡].

وحتى نذكر دور العرب والمسلمين في التمهيد لصياغة قوانين الحركة، سنتحدث عن استيعابهم لبعض مصطلحات الميكانيك ومفـــاهيمه كما نعرفها اليوم. ففي كتابه **السَّمَاعُ الطــبيـــعي** يُحدّد **ابن سينا** الحركة بستة عوامل...**وأعلم أن الحركة تتعلق بأمورٍ ستـــةٍ هي المتحرك** الجسم المتحرك **والمحرك** الجسم المحرك - المُسبب للحركة **وما فيه** موضع الجسم **وما منه** المكان الذي بدأت منه الحركة **وما إليه** المكان الذي تؤول إليه الحركة **والزمان** [3]. كما نجد تعريف **ابن سينا** للحركتين المقيدة **القسريـــة** والحرة **الطبيعية**...**وكل جسمٍ متحركٍ فحركته إمّا من سببٍ من خارجٍ وتسمى حركـــةً قسريـــةً، وإمّا من سببٍ في نفس الجسم إذ الجسم لا يتحرك بذاته، وذلك السبب إذا كان محركاً على جهةٍ واحدةٍ على سبيل التسخير فيسّمى طبيعة** [4]. أو....**إن الحركة التي بالقسر هي التي مُحركها خارجٌ عن المتحرك بها وليس مقتضى طبعه. وهذا إما أن يكون خارجاً عن الطبع، مثل تحـــريك الحجر جراً على وجه الارض، وإمّا أن يكون مضاداً للذي بالطبع، كتحريك الحجر الى فوق** [5].... وهناك تعريفٌ آخر للحركة الانتقالية والحركة الدورانية يُورده **البغدادي** حيث أطلق عليهما اسم **الحركة المكانية والحركة الوضعية** على التوالي، فيقول....**الحركة المكانية هي التي بها ينتقل المتحرك من مكانٍ الى آخر، والحركة الوضعية هي التي تَتَبدل بها أوضاع المتحرك ولا يخرج عن جملة مكانه كالدولاب والرحا** [6].

كما يتحدث **الحسن بن الهيثم** 965 - 1036، في كتابه الساطع **المناظر** ممهدًا لنظريته في انعكاس الضوء باعتبارين أساسيين، هما **الحركة الطبيعية للجسم والحركة العرضية** [7]....ويتلخص الاعتبار الأول في إسقاط كرةٍ ملساء من الحديد أو النحاس أو شبههما من موضعٍ مرتفع على مرآةٍ مستويةٍ أُفقيةٍ من الحديد، ثم يتأمل الكرة عند ارتطامها بالمرآة وبعد ذلك. ويُبين أن الكرة بعد الارتطام بالمرآة ترتد للأعلى....**ويكون انعكاسها عن المرآة أقوى والى مسافةٍ أبعد، وإن ألقيت من مسافةٍ أقرب كان رجوعها أقل** [8]..... أما الاعتبار الثاني فيتلخص في جعل المرآة قائمة في جدارٍ قائمٍ ليكون سطحها رأسياً، ثم تُقذف الكرة نحو المرآة بقوةٍ، بحيث يشكل خط حركة الكرة زاويةً قائمةً على سطح المرآة، وثانياً على استقامة خطٍ مائلٍ على سطح المرآة وموازٍ للأفق. ويقول **ابن الهيثم** في بيان مشاهداته عن الحالة الأولى....**إنها ترجع على العمود نفسه القائم على سطح المرآة موازية للأفق.** وفي بيان مشاهداته عن الحالة الثانية... **فإنه يجدها ترجع في الجهة المقابلة للجهة التي فيها الرامي، ويجدها في أول رجوعها متحركةً على خطٍ موازٍ للافق، ومائلٍ على سطح المرآة ميلاً شبيهاً بميل السهم عند تفويقه الى المرآة بالقياس الى الحس** [9]... .

‡ إذ برهنت نظرية أينشتاين أنه لو كان في العالم المادي فضاءٌ مطلق، لأمكن قياس سرعة الأرض المطلقة نسبةً إليه، ولتحرك الضوء بخطٍ مستقيم. انظر: غُصيب، د. هشام، **مدخل مبسط إلى منطق نظرية النسبية الخاصة**، عمان: دار الفرقان، 1984، ص 18.

وكما هو ملاحظ، يستعمل **ابن الهيثم** مصطلحاً جديداً، هو **قوة الحركة**، ليربطه بحركة الجسم الهابط إلى أسفل. يقول في **المناظر**. .... **إذا كانت مسافته أطول كانت حركته أقوى وأسرع، إنّ حركته المكتسبة إنَّمَا تكون بحسب مقدار المسافـــة وبحسب مقدار الثقل**[10]. .... هذا المفهوم الجديد **(لقوة الحركـــة)** مُشابهٌ لطاقة وضع الجسم الساقط من ارتفاعٍ **(مسافة)** ما، إن لم يكن الطاقة ذاتها. لكن من جهةٍ أخرى، يُعرّف **ابن الهيثم** نفس المفهوم على الحركة الأفقية للكرة .....**أنـــّه كلما كانت قوة القذف أقوى كان رجوع الكرة أقوى**[11]، وكأنه يعني **بقوة الحركـــة - القذف** الزّخم، المفهوم الحديث لحاصل ضرب الكتلة والسّرجهة velocity.

إن التمييز بين الزّخم والطاقة في تاريخ الميكانيكا لم يكن سهلاً، وإنه وإن حُلّت هذه الإشكالية في القرن الثامن عشر، فإن ثمانمائة سنة قبل هذا التاريخ تشفع لعالمنا **ابن الهيثم** عدم قدرته على التمييز بينهما.

وحتى نُوفي **ابن الهيثم** حقَّه، نُورد له نصّين أوردهما **مصطفى نظيف** من كتابه **المناظر**.... **وإذا كان الاعتماد** الحركة **مركباً من هاتين الحركتين كانت الحركة التي تحدث من هذه الممانعة مركبة من الحركة على العمود القائم على سطح الجسم المانع في الجهة الخارجة من الجسم المانع، ومن الحركة نفسها التي كانت في جهة العمود القائم على هذا العمود الممتد في الجهة التي إليها الحركة. ويتولد من هذا القسط** الأول **من الاعتماد ومن ممانعة الجسم المانع ، لهذا القسط من الاعتماد، حركـــةٌ على العمود نفسه الذي عليه كان (هذا القسط) من الاعتماد، وفي الجـــهـــة من هذا العمود المقابلة لجـــهـــة الاعتماد. ويكون القسط الثاني من الاعتماد الذي هو من الحركة على العمود القائم باقياً على حاله لم يبطل ولم يتولد منه حركةٌ مضادةٌ، لأن جهة هذا العمود ليس فيها مانع**[12].

وفي مكانٍ آخر يتحدث **ابن الهيثم** بشكلٍ غير مباشر عن التّصادم بين جسمين ومعامل الارتداد فيقول ....**إن الأجسام الثقال إذا سقطت إلى أسفل من موضعٍ عالٍ ثم لقيت عند مسقطها جسماً صلباً كالصخر أو الحديد أو ما جرى مجرى ذلك، إنعكست في الحال راجعةً ويكون رجوعها بحركةٍ قويةٍ، وإذا لقيت عند مسقطها جسماً رخواً كالرمل أو التراب أو ما شاكـــل ذلك، إنتشبت فيه ولم ترجع. وإن صادفت جسمـــاً فيه بعض الصلابة وبعض اللين كالجِصّ أو الخشب أو ما جرى مجرى ذلك في اللين، رجعت رجوعاً ضعيفاً. وكذلك إن رمى رامٍ بحجرٍ إلى جهةٍ من الجهات فلقي ذلك الحجر جسماً من الأجسام الصلبـــة قبل أن تـــفـنـــى الحركة التي فيه ، فإنه ينعكس راجعاً، واذا كانت حركـــة قويـــةً يرجع بقوةٍ قويةٍ. وان لقي جسماً فيه بعض الصلابة وبعض اللّين رجع رجوعاً ضعيفاً، بحسب ما في ذلك الجسم من الصّلابة ثم انحطّ الى السفل**[13].

إن هذه النصوص المقتبسة من كتابه **المناظر**، لتُدلّل على أن واضعها **ابن الهيثم** قد تعامل مع الضوء على أساس أنه جسيم مادي ...**والاعتبار الأول يتلخص في أن يُسقِط المعتبر كرةً صغيرةً ملساء من الحديد أو النحاس أو ما يجري مجراهما**[14]....، وذات سرعةٍ محددة ، لم يحدّد قيمتها*.... **ووصول الضوء من الثقب إلى الجسم المقابل ليس يكون إلاّ في زمان، وإن كان خفياً عن الحس**[15]....، مدركاً فكرة تحليل السرعة إلى

* **أولي رومر** Ole Roemer، 1676، أول من حدّد رياضياً سرعة الضوء بقيمةٍ تقارب 225 ألف كيلومتر/ثانية، وذلك من دراسته لحركة أقمار المشتري. انظر: ستيفن هوكنج، **موجز في تاريخ الزمن، من الإنفجار العظيم إلى الثقوب السوداء**، ترجمة حيدر، عبد الله، بيروت: أكاديميا 1990، ص 37.

مُرَكِّبَتَين، **قسطين**، وهو ما عرف فيما بعد بالمتجهات...، **وإذا كان الاعتماد مركبا من هاتين الحركتين كانت الحركة الحادثة مركبةً من الحركة على العمود القائم على سطح الجسم المانع ومن الحركة على العمود القائم على هذا العمود الممتد في الجهة التي إليها الحركة**[16].... ، مضيفاً إليهما الناحية الديناميكية التي تعني العلاقة بين الحركة والقوة المؤثرة على الجسم، ومبيناً أن للضوء زخماً **قوة الحركة** وهذا الزخم محفوظٌ وثابتٌ في اتجاهٍ معين لعدم وجود قوةٍ عارضة، **مانعٍ**، في ذلك الاتجاه ... **ويكون القسط الثاني من الاعتماد والذي هو من الحركة على العمود القائم على هذا العمود باقياً على حاله، لم يبطل ولم يتولد منه حركةً مضادة، لأن جهة هذا العمود ليس فيها مانع**[17]... . كما أعطى تفسيراً تطبيقياً لمعامل الارتداد.

استناداً على ما ورد من استيعاب العرب والمسلمين للمصطلحات والمفاهيم الميكانيكية المختلفة، فقد صاغوا قوانين **قضية** الحركة بمفاهيم قريبةٍ لتلك التي صاغ بها **نيوتن** قوانينه.

فهذا **ابن سينا** يُعرّف الحركة الذاتية للجسم في إشارته،...**إنك لَتَعلم أن الجسم إذا خُلّي وطباعُه، ولم يـُعـرض له من خارجٍ تـأثـيرٌ غريب، لم يكن له بدٌ من موضعٍ معيـن وشكلٍ معين، فإذن في طباعه مبدأ استيجاب ذلك**[18]. نفهم من هذا القول أن الجسم وبمقتضى طبعه (إذا تُرك وشأنه) ، ولم يُؤثر عليه أي تأثيرٍ من خارجه، كجسمٍ يطلب المكان والتشكل. والطبع كما يُعرفه الفلاسفة القدماء مبدأ لحركة الشيء الذي فيه هذا (الطبع)، سواءً أكانت (الحركة) عن شعورٍ أم عن غير شعور، والتشكل هو مجموع علاقاتٍ داخليةٍ في المادة بذاتها، وتشمل مقولات المكان والزمان والوضع والكمية والكيفية وغيرها. إن وجود الجسم في (حركته نحو) المكان المعين هو ليس من فاعلٍ مُختارٍ خارج الجسم، بل هو من ذات الجسم بطبعه وباستحقاقه الذاتي. أي أنّ طلب الجسم للمكان، وهو الحركة المكانية، تحدُث من ذات الجسم، وعند عدم التأثير عليه بمؤثرٍ خارجي. أي أن استقرار الجسم وسكونه في موضعٍ معين يحدُث حالما لا يؤثر عليه مؤثرُ خارجي[19]. هذه الإشارة تكافئ بل هي جزء القانون الأول لنيوتن الذي ينصّ على عدم حركة الجسم - سكونه - عند عدم التأثير عليه بمؤثرٍ خارجي.

كما بحث **أبو البركات البغدادي** في قضية الحركة، وقد أورد في كتابه **المعتبر في الحكمة**، ......**وكل حركةٍ ففي زمانٍ لا محالة ، فالقّوة الأَشدّ تُحرِك أسرع وفي زمانٍ أقصر، فكلما اشتدت القّوة ازدادت السّرعة فقصر الزّمان ، فاذا لم تتناه الشـدة لم تتناه السرعة، وبذلك تصير الحركة في غير زمانٍ وأشدّ، لأنّ سلب الزمان في السرعة نهاية ما للشدَّة**[20]. هذا القول يُفهمنا أن زيادة السرعة وهي الفرق بين سرعتين في لحظتين متتاليتين تحدث من زيادة القّوة - اشتدادها. إن زيادة السرعة كمفهومٍ رياضيٍ حديث يرتبط بالتسارع ارتباطاً وثيقاً، حيث أنّ قيمة التسارع تكافئ معدل تغير (زيادة أو نقصان) السرعة. إن ربط زيادة السرعة وليس السرعة فحسب، بزيادة القوة **القّوة الأشّد** أو بالقوة لهو خطوةٌ هائلةٌ نحو إيجاد العلاقة الصحيحة بين معدل تغُير السّرعة والقوة - **قانون نيوتن الثاني.** هذا مع العلم ان الجملة الأخيرة من النَّص تُفسّر في بعض الكتب[21]، بحيث أن **سلب الزمان في السرعة** يقابل التسارع و**نهاية ما للشدة** تقابل القوة، ليؤول النص إلى أن القوة تتناسب مع التسارع.

وبالنسبة للقانون الثالث للحركة فيعبر عنه أيضا **البغدادي** بقوله ......**إن الحلقة المتجاذبة بين المتصارعين لكل واحد من المتجاذبين في جذبهما قوة مقاومة لقوة الآخر، وليس إذا غلب أحدهما فجذبها نحوه تكون قد خلت من قوة جذب الآخر، بل تلك القوة موجودةٌ مقهورةٌ، ولولاها لما احتاج الآخر الى كل ذلك**

الجذب[22]. كما ويُعبر **فخر الدين الرَّازي** عن نفس القانون بشكل أفضل بقوله، .....**الحلقة التي يجذبها جاذِبان متساويان حتى وقفت في الوسط، لا شك أن كل واحدٍ منهما فعل فيها فعلاً معوقاً بفعل الآخر، ثُمّ لا شك أن الذي فعله كل واحدٍ منهما لو خُلي عن المـُعـارض لاقتضى اجتذاب الحلقة إلى جانبه**[23]. ويوضح الرازي فكرة **الاتزان** تحت تأثيرٍ قوتين متساوتين في المقدار ومتعاكستين فيقول في معرض شرحه لإشارات **ابن سينا**، ....**فالحبل الذي يجذبه جاذبان متســاويا القوة الى جهتين مختلفتين لا يخلو إما أن يُقال أنه ما فعل واحد منهما فعلاً وهو محال، لأن الذي يمنع كل واحدٍ منهما عن فعله هو وجود فعل الآخر، أو يُقال فعل أحدهما دون الآخر وهو أيضاً مُحال، وكان يجب أن يتحرك الجسم الى تلك الجهة، أو يُقال كل واحدٍ منهما فعل فيه فعلاً**[24] ....

هذه الإرهاصات لم تجد من يُناقشها المناقشة الوافية، ولم تُنقح من قِبَل دارسيها، فبقيت طيّ الكتب والمؤلفات. كيف لا وقد كُتبت في أواخر فترة ازدهار الحضارة العربية الإسلامية، إذ تُرجِم بعضُها الى اللغات اللاتينية مع بداية عصر النهضة الأوروبية الحديثـة. إن هذا ليس تحديثاً للفكر القديم بما فيه إسقاط النظريات الحديثة المعاصرة على أفكار ونظريات العصور الوسطى، حتى لكأن كل ما يُفكر به علماء وفلاسفــة عصرنا يجب أن يكون علماء وفلاسفــة العصور الوسطى قد فكروا به. كما يجب علينا الحذر من الوقوع في اللاتاريخية عن طريقٍ آخر معاكس، ذلك أن المبالغة في تجنبها سيؤدي تقريبا إلى الوقوع فيها، بما في ذلك من قطعٍ للصلة بين ماضي المعرفة البشريــة وحاضرها[25].

في فترة النهضة الأوروبية الحديــثــة تطورت الميكانيكا بشكلٍ كبير، وقد برز علماءٌ كثيرون سنُركّز على من تركوا بصماتٍ واضحةٌ في هذا العلم ومن أهمهم:

ليوناردو دافنشي L.Devinci، 1452- 1519، بالإضافــة إلى عبقريتــه في الرســم وباقي العلوم فإنه بحث في مشاكل الطيران والأيرودياناميكا والهيدروديناميكا. وقال بأن الجاذبية ليست خاصية للأرض فقط، بل لكل الكواكب والأجسام. كما بحث في حركة الاجسام تحت تــأثير قوتي جذبٍ من مركزين مختلفين.

غاليليو غاليلي G.Galileo، 1564- 1642، أثبت بالتجربة أنّ كلّ الأجسام لها تسارعٌ ثابتٌ أثناء سُقوطها. كما صاغ كلاً من مفهومي النظرية النسبيــة ومبدأ القصور بشكلٍ بــدائيٍ.

يوهان كِبلر J.Kepler، 1571- 1630، أوجد التفســير العصري للرابــطــة التي تربط حركة جميع الكواكب بالنظام الشــمســي. أعطى البدايات لمبدأ الجذب المتبادل بين الكتل المختلفة. صاغ ما يُعرف اليوم بقوانين الحركة الكِيَنمَاتيكية للأجرام السماوية: قانون المســاحات وقانون المسار الإهليلجّي للكوكب أثناء حركته وقانون زمن دورته حول الشمس.

اسحق نيوتن I. Newton، 1643- 1727، أنهى دراسته في جامعة كامبردج باصدار كتابه الرائع **المبادىء الرياضية للفلسفة الطبيعية** Philosophiae Naturalis Principia Mathematica عام 1687، وفيه صاغ قوانينه الثلاثة: القصور والقانون الأساسي وقانون الفعل ورد الفعل . لقد عمّمَ مفهوم القوة وعرَّف لأول مرةٍ مفهوم الكتلة. كما صاغ قانون الجاذبية العام الذي ينص على أن الأجسام تجذب بعضها البعض بقوةٍ تتناسب طردياً مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسيًا مع مربع المسافة بينهما. وعلى هذا الأساس صيغت القوانين الأساسية

لما يُسمّى الميكانيكا الكلاسيكية. وقد اختبرت هذه القوانين فيما بعد بتجارب عديدةٍ، وتأكدت عملياً وعلمياً في التطبيق البشري والاجتماعي والانتاجي. لقد أصبح **نيوتن** وبحق مؤسس علم الميكانيكا النظرية.

في القرن الثامن عشر راحت تتطوّر بسرعة الطرق التحليلية لحل مسائل الميكانيكا، أي الطرق المبنية على تطبيق حساب التفاضل والتكامل، وقد برز في هذا الحقل الأخوة **بيرنولي** Bernoulli؛ **يعقوب** 1654-1705، **يوهان** 1667- 1748 و**دانييل** 1700- 1782، ثم **ليوناردو أويلر** L.Euler، 1707-**1783**. والأخير عرف عزم القصور وزوايا دوران الجسم الجاسئ. أمّا **ج.ل. دالمبير** J.L.Dalambert 1717 -1783، فقد استحدث طريقةً جديدةً لحل مسائل الديناميكـــا لا تختلف كثيراً عن حل مسائل الاتزان الاســـتاتيكي وتُعرف حالياً **بمبدأ دالمبير**. وقد حذا حذوَه مواطنه **ج.لاجرانج** J.Lagrange، 1736 -1813 الذي وضع الطريقة التحليلية لحل مسائل الديناميكا على أساس مبدأ دالمبير ومبدأ الشُغل الافتراضي.

كما شـــهد القرن التاســـع عشر وبداية القرن العشرين تقدماً في علوم الطيران على يد **ن. جوكوفسكي** N.Jukovsky، 1847-1921، وكذلك **س. تشـــابلجين** S.Tchabalgin 869 -1942 اللذين حلا عدداً من المشاكل التكنيكية المُـــلحـــة. كما أنّ هناك العديد من العلماء الذين أَثْرَوا علم الطيران بنظرياتٍ جديدةٍ منهم: **أ. ميتشيرسكي** A.Meschersky، 1859-1935، وضع الأساس لديناميكا الأجسام ذات الكتل المتغيرة، و**ك. تسيلكوفسكي** K.Tsiolkovsky،1857 -1935، وضع الأساس النظري لحل المسائل التطبيقية لصناعة الصواريخ وميكانيكا الفضاء[26].

لقد دُعّمت قوانين نيوتن باكتشافات الكواكب تباعاً، وقادت هذه القوانين أيضاً إلى اكتشاف كواكب جديدةٍ وبعيدة. إذ سَـــبَق أن أدرك **نيوتن** أنَّه، وبالرغم من صِغر القوى المتبادلة بين كوكبٍ وآخر، فإنها ذات أثرٍ في إحداث اضطراباتٍ صغـــيرةٍ في مسار الكوكب الاهليلجيّ التـــام والناتج من تأثير قوة جذب الشمس لوحدها. وقد دُعيت قُوى الاضطراب الاضافية تلك بالتّرجَـــافَـــات perturbations. وهذه دُرست بعناية مُتزايـــدة إلى أن أضحت الجاذبية قوةً كونيـــةً تعمل بين جميع الكواكب والأجسام في النّظام الشّمسي. لقد كان عدد الكواكب المعروفة ستـــةً عندما تمكن **وليم هيرشيل** W.Herchel عام 1781 من اكتشاف الكوكب السابع **أُورانُوس** Uranous، الذي يبعد عن الشمس ضعف بعده عن الكوكب السادس **زُحل** Saturn. لقد تمّ رصدُه وحساب مداره المستقبلي، وبدورةٍ تُناهز 84 عاماً، لم يكن **أورانوس** في عجلةٍ من أمره لرسم مداره الذي تمّ التنبؤ به. إذ مرت خمسون عاماً تقريباً قبل أن يَثبُت أن مسار الكوكب لا يتبع المسار المحدد له حسابياً، والناتج من تأثير الشمس والكواكب السبعة الأولى. والمثير للدهشة، إن قانون الجذب الكوني لنيوتن بدا وكأنه عاجزٌ عن حل أو تفسير هذه الظاهرة. وعلى نقيض ما كان متوقعاً، افترض **ليكسل** Leksel، أحد الفلكيين من بطرسبورغ، وجود كوكب مجهول، لم يُكتشف بعد، ربّما يؤثر بتَرجافٍ محدد على **أورانوس**. فاكتشف الشّابان **جون أدامز** J. Adams، 1819 -1892 من إنجلترا و**إيربان ليفيرييه** U. Leverrier، 1811 -1877 من فرنسا، وكلاهما يجهل الآخر، الكوكب **نبتون** Neptune عام 1846 بناءً على حساباتٍ تستند الى قانون الجذب الكوني والترجافات الناتجة عن الكواكب السبعة الأولى بما فيها **أورانوس**[27].

ولقد قادت سلسلةٌ مشابهةٌ من الأحداث، رغم أنها أقل إثارةً، وبعد حساباتٍ على كوكبي **نبتون** و**أورانوس** بينت ضرورة وجود كوكب آخر بعد نبتون، إلى اكتشاف الكوكب التاسع، والأخير حتى الآن، **بلوتو** Pluto، وتحددت دورته ب 248 عاماً أرضياً.

وفي الحقيقة؛ إنّ أول إلماعٍ لعجز ميكانيكا نيوتن قد ورد من خلال دراسة كوكب **عطارد** Mercury، الذي يُنهي دورته حول الشمس في 88 يوماً أرضياً فقط. فمع كل دورةٍ له حول الشمس ثبت أن نقطة حضيضه perihelion، تســتبق (تنحرف) قليلاً باتجاه دوران الكوكب نفسه، بمقدارٍ يُعادل 43 ثانيةً قوسية لكل مئة عام[28]. هذا الاســتباق كان معروفاً لعشرات السنين، بدون هذه الدقــة، وأيضاً بدون تفسيرٍ علميٍ مقنع. إحدى الظواهر الأخرى التي لم تُفســرها قوانين نيوتن هو عدم التطابق بين الصور التلســكوبية الملتقطة لعددٍ من النجوم البعيدة أثناء رصدها وفي أوقاتٍ مختلفةٍ من السنة، مع أن تحرك هذه النجوم يكاد يكون معدوماً، أو في أحسن الأحوال أُخذ هذا التحرك بعين الاعتبار، إلا أن قانون الجذب الكوني وقف عاجزاً عن تفســيرها.

ألبرت أينشتاين A. Einstien، 1879- 1955، أعطى وعرّف حدود استخدام قوانين نيوتن على المستوى العياني. كان هذا في عام 1905، عندما أعلن عن نظريته النسبية الخاصة Special Relativity، التي بيّن فيها أن سرعة الضوء ثابتةٌ في الفراغ، أياً تكن سرعة مصدره بالنسبة إلى المشاهد، وأنَّ الزمن ليس مُطلقاً بل متغيراً تبعاً للسرعة. ثُم أتبَع هذه النظرية بالنظرية النسبية العامة General Relativity عام 1916، عندما بين أنّ كلّ جسمٍ ماديٍ ولا ماديٍ immaterial، كالفوتونات والنيوترونات في مجال قوة الجاذبية يتحرك بخطٍ منحنٍ، وفي حالاتٍ خاصة سيكون هذا الخط مستقيماً. كما استند **أينشتاين** إلى **مبدأ التكافؤ** Principle of Equivalence الذي صاغه عام 1915 و**صيغة لورنتس** Lorent's Formula التحويلية لانكماش الطول length contraction وتباطؤ الزمن time dilation وَفْقَاً للنسبة $1{:}\sqrt{1-(v/c)^2}$ فحدَّدَ أن الضوء المار في مجالٍ جاذبي يعاني الانحناء بقدرٍ يمكن قياسه. وهذا الانحناء حُسب لضوء النجوم المار بجانب الشمس من معادلات النسبية فوجده 1.75 ثانيةً قوسية [29].

ونظراً لأن أشعة الضوء القادمة من نجمٍ لا يــمكــن أن تُرى في وضح النهار لِتَغَلُّب أشعــة الشمس عليها، فإن إثباتَ انحناء الضوء واختبارَ تنبؤ **أينشتاين** لا بُدّ أن يتمّ في وقت كسوف الشمس الكّلي. لهذا قامت بعثتان بريطانيتان بإثبات هذه المسألــة أثناء الكسوف الشمسي الذي حدث في 1919/05/29، حيث استقرت إحداها في خليج غينيا في أفريقيا، بينما تركزت الثانية على الطرف المقابل للمحيط الأطلســي في شمال البرازيل. وقد قامت البعثتان برصد النجوم حول الشمس المكسوفة وصورت نفس المنطقة من السماء عندما ابتعدت الشمس عنها. لقد أظهرت المقارنة بين الصور الناتجة اختلافاً ما في مواقع نفس النجوم. وتوصلت البعثتان، بعد حســاب الخطأ الناجم عن عدم الدقة في الأجهزة والأمور الأخرى إلى أن مقدار الانحراف بلغ 1.72 ثانيةً قوسية [30].

وبينما كانت الاختبارات الأولى لصحة النسبية فلكيةً، لاعتمادها قياساتٍ تشوبها شكوكٌ قد يستحيل تبديدها، تغير الحال منذ العام 1960، إذ تمت القياسات عندئذٍ في المختبر. فبعد النجاحٍ في التقاط صدى رادارٍ من كوكب الزُّهرة Venus، قيس الوقت الذي استغرقته الموجات لبلوغ الأرض في حالتي وجود الشمس أو عدمه على المسار، وتمت مقارنة الوقت المقاس بالنظرية. لقد دلت هذه القياسات على أن هناك توافقاً مع النسبية بفارقٍ يقل

عن 0.1%[31]. كما انحرف الشعاع الضوئي الصاعد في مختبر جفِرسُن/جامعة هارفارد بفعل الجاذبية الأرضية نحو الحمرة إلى الدرجة المتوقعة تماماً [32].

ماكس بلانك M. Planck، 1858-1947، عالم ألماني نشر عام 1900 فرضيته الكمِّية التي قال فيها أن الضوء والموجات لا يمكن أن تنبعث بمعدلٍ عشوائيٍ اعتباطي، بل في حزمٍ معينة، أسماها الكمّات quanta. ولكل كمٍّ quantum مقدارٌ معين من الطاقة. لقد فسرت فرضية الكمّ معدلَ بثٍّ الإشعاعات المرئية من الأجسام الحارة تفسيراً جيداً جداً، إلا أن مضامينها بالنسبة إلى الحتمية لم تُدرَك إلا سنة 1926، عندما عرَّف عالمٌ ألمانيٌ آخر هو **ورنر هايزنبرغ** W. Heisenberg 1901- 1976 **مبدأ الريبة (اللاحتمية)** Uncertainty Principle[33]. إذ يقوم هذا المبدأ على استحالة القياس المتزامن والدقيق لموقع وسرعة أي جسيم. ففي سبيل التنبؤ بحركته في المستقبل، سلّط **هايزنبرغ** فوتوناً على الجسيم فحدد موقعه، لكن الجسيم امتص طاقة الفوتون فتغيرت سرعته. كما أن قياس الموقع بدقةٍ متناهية يتطلب استخدام موجاتٍ قصيرة جداً، وبطاقةٍ أكبر للكمّ الواحد، فيكون تأثر سرعة الجسيم بمقدارٍ أكبر. وبكلمةٍ أخرى، كلما أردنا قياسَ موقع الجسيم بدقةٍ أكبر، كلما تناقصت دقتنا في قياس سرعته، والعكس بالعكس. فالإليكترون، مثلاً، هو جسيمٌ بالغ الضآلة ويستتبع قياس موقعه في الذرة ارتداد الفوتونات الضوئية عنه. مهما يكن من أمر ، تُفضِي القوة البالغة للضوء إلى اقتلاع الإليكترون من الذرة وتغيير سرعته وبالتالي موقعه.

وبعد، يمكننا القول بثقةٍ أنّ الميكانيكا أضحت اليوم علماً يصف حركة الأجسام الماديَّة بشرطٍ واحد، أن لا تكون هذه الأجسام سريعةً جداً أو صغيرةً جداً. إذ بينت النظرية النسبية أن قوانين نيوتن لا تستطيعُ وصفَ حركة الجسم الذي سرعته قريبةٌ من سرعة الضوء. وفي وقتٍ لاحقٍ، بينت ميكانيكا الكم Quantum Mechanics، التطور الآخر للقرن العشرين، أن ميكانيكا نيوتن لا تستطيعُ وصف الحركات الداخلية في الذرات أيضاً. إن النسبية وميكانيكا الكم قد قلمّتا أطراف الميكانيكا مختزلتين إيّاها من قطاعٍ لا متناهٍ إلى قطاعٍ مُتناهٍ. وعلى ذلك أضحت الميكانيكا علماً صائباً كلياً لوصف الطبيعة في قطاعٍ محدّد.

مراجع الباب الأول

[1] مروّه، حسين، **النزعات المادية في الفلسة العربية الإسلامية**. جـــ 2 ، بيروت: دار الفارابي 1979، ص 669.

[2] دنيا، سليمان، **الإشارات والتنبيهات للشيخ الرئيس ابن سينا**. ق 2 - **الطبيعة** ، القاهرة: دار إحياء الكتب العربية، عيسى البابي الحلبي وشركاه، 1948، ص 120.

[3] مدكور، د. إبراهيم، **ابن سينا، الشفاء، الطبيعيات، السّماع الطبيعي**، القاهرة: الهيئة المصرية العامة للكتاب، 1983، ص 87.

[4] باشا، د. أحمد فؤاد، **التراث العلمي للحضارة العربية الإسلامية ومكانته في تاريخ العلم والحضارة**، القاهرة: جامعة القاهرة، كلية العلوم، 1983، ص 76.

[5] مدكور، د. إبراهيم، مرجع سبق ذكره، ص 324.

[7] باشا، د. أحمد فؤاد ، مرجع سبق ذكره، ص 74.

[7] نظيف، مصطفى، **الحسن بن الهيثم بحوثه وكشوفه البصرية**، جـــ 1، القاهره: مطبعة نوري بمصر، 1942، ص121.

[8] المرجع السابق، ص 124.

[9] المرجع السابق، ص ص 122 - 123.

[10] المرجع السابق، ص ص 123 - 124.

[11] المرجع السابق، ص 124.

[12] المرجع السابق، ص ص 129 - 130.

[13] المرجع السابق، ص ص 124 - 125.

[14] المرجع السابق، ص 122.

[15] المرجع السابق، ص 119.

[16] المرجع السابق، ص 129.

[17] المرجع السابق، ص 129.

[18] دنيا، سليمان، مرجعٌ سبق ذكره، ص 164.

[19] مروّه، حسين، مرجعٌ سبق ذكره، ص 645.

[20] باشا، د. أحمد فؤاد، مرجعٌ سبق ذكره، ص 77.

[21] المرجع السابق، ص 76.

[22] شوقي، جلال، **تراث العرب في الميكانيكا**، القاهرة: الهيئة المصرية العامة للكتاب، 1976، ص ص 70 - 71.

[23] باشا، د. أحمد فؤاد، مرجعٌ سبق ذكره، ص 77.

[24] المرجع السابق، ص 77.

[25] مروّه، حسين، مرجعٌ سبق ذكره، ص 645.

[26] س. تارج، **الميكانيكا النظرية**، ط 3، الإتحاد السوفياتي، موسكو: دار مير للطباعة والنشر، 1975، ص 11.

[27] فورد و. ك، **الفيزياء الكلاسيكية والحديثة**، مجلد 1، ترجمة غصيب، همام وشاهين، عيسى، عمان: منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، 1981، ص 342.

[28] عظيموف، إسحق، **العملاق النووي**، ترجمة شمعون، د. الياس، بيروت: أكاديميا، 1992، ص 51.

[29] المرجع السابق، ص 50.

[30] تِمُثِي، فَرِس، **بلوغ سن الرشد في المجرة**، ترجمة مطر، هنري، عمان: مركز الكتب الأردني، 1990، ص ص220 - 222.

[31] عظيموف، إسحق، مرجعٌ سبق ذكره، ص 55.

[32] تِمُثِي، فَرِس، مرجعٌ سبق ذكره، ص 222.

[33] كاكو، ميشو وترينر، جنيفر، **ما بعد أينشتاين**، ترجمة فوق العادة، د. فايز، بيروت: أكاديميا، 1991، ص ص 63 - 64.

الباب

الثاني

الكَيْنِماتِيكا KINEMATICS

علمُ الكَيْنِماتيكا هو فرع الميكانيكا النظرية الذي يبحث في الخواص الهندسية لحركة الجسيمات والأجسام دون اعتبار لكتل العناصر المتحركة و/ أو للقوى التي تنتج أو تحافظ على هذه الحركة. والكَيْنِماتيكا هي القسم الثاني من أقسام الميكانيكا، بعد الإســـتاتيكا Statics، وقبل الدِّيناميكا Dynamics. ولذلك تدرس مادة الكَيْنِماتيكا إمّا كجزءٍ مســــتقل، وإمّا كمقدمةٍ لعلم الديناميكا. إذ يعتبر تحديد العلاقات الكَيْنِماتيكية ومعرفتها من الأساسيات عند دراسة حركة الجسيم من وجهة النظر الديناميكية.

وتعرف الحركة الميكانيكية في الفراغ بأنها تغيّر موضع change of position الجسم المتحرك بالنسبة إلى جسم آخر بمرور الزمن. وحتى نحدد موضع جسم متحرك تحديداً كاملاً في الفراغ بالنسبة إلى جسم آخر، نثبت نقطةً في الجسم الثاني، وندرس الحركة بالنسبة إليها. وفي العادة تُدعى هذه النقطة بنقطة الأصل لإطار الإسناد frame of reference. وإذا ما كانت نقطة الأصل نقطةً ثابتةً في الفضاء كمركز الشمس أو مركز الأرض [1] كان هذا الإطار إطاراً قصورياً inertial frame، أو إطاراً ثابتاً fixed frame. وبالعكس إذا كان مركز إطار الإسناد نقطةً على سطح الأرض أو حتى على سطحِ جسم آخر متحرك، كسفينة في البحر، أو شاحنة تسير على طريقٍ ما، دعي هذا الإطار بالإطار المتحرك moving frame.

وحيث إن الكثير من الحركات في الطبيعة لا يتم بهذا التعقيد، لذا يمكن اعتبار نقطةٍ ما على سطح الأرض أو نقطة بداية الحركة مركزاً لإطارٍ قصوري أو إطارٍ ثابتٍ بدقةٍ كبيرة. وبالعادة نرمز للحركة بالنسبة لإطار إسنادٍ قصوري بالحركة المطلقة absolute motion، وذلك لتمييزها عن الحركة النسبية relative motion المقيسة بالنسبة لإطار إسناد متحرك. وكما سنرى في الباب الثالث فإن الحركة المطلقة هي الحركة بالنسبة لنظام إحداثياتٍ مثبت في مركز الكون.

---

[1] في الحقيقة، يعتبر المركزان، مركز الشمس ومركز الأرض متسارعين أيضاً. ومع هذا نعتبر كلاً منهما مركزاً لإطار إسنادٍ قصوري، لأن تسارع أيُّهما ذو رتبةٍ أدنى من تسارع الجسم قيد الدراسة. لمزيدٍ من التفاصيل، انظر **الباب الثالث**، البند: **أُطُرِ الإسناد**، ص 72.

والجسم الذي يظل في الموقع نفسه طوال الوقت بالنسبة إلى إطار إسنادٍ ما هو جسمٌ ساكنٌ بالنسبة لهذا الإطار، بينما يكون الجسم متحركاً إذا تغيرت إحداثيات بعض عناصره على الأقل بمرور الزمن. وبالعادة تجري الحركة في الفراغ عند مرور (سريان) الزمن. والفراغ الذي نتحدث عنه هو فراغ أُقليدس ذو الأبعاد الثلاثة. ويعتبر الزمن في الميكانيكا الكلاسيكية كميةً مطلقةً absolute quantity تسرى بطريقةٍ واحدة لجميع أطر الإسناد. ولذلك تشمل مسائل الكَيْنَمَاتيكا الكميتين الفيزيائيتين الطول L والزمن t. وبينما يعتبر المتر وَحْدَة الطُّول في **النظام الدُّوَلي** للوَحَدَات *SI*[2]، يُعْتَبَر الزمن كميةً قياسيةً scalar quantity ، يتغير باستمرار ويٌقاس بالثواني. كما تعتبر الكميات الأخرى كالسرجهة velocity والتسارع acceleration كمِّياتٍ مشتقةٍ من الكميتين السابقتين الطول والزمن.

ويتطلب حل المســائل الكَيْنَمَاتيكية أن تكون الحركة نفسها معطاةً وموصوفــةً بطريقــةٍ ما. أي أن يكون موضع الجســم المتحرك أو النظام محدداً في كل لحظــةٍ زمنيةٍ بالنسبة إلى إطار الإسناد المعين، ليدعى ذلك بمعادلة حركة equation of motion الجسم. وتبعاً لذلك تنحصر المسألة الكَيْنَمَاتيكية الأساسية في تعيين السرجهة ومتجه التسارع مضافاً إليهما المسار trajectory، وذلك عند معرفة معادلة الحركة. ولأن حركة الجسيم[3] particle أبسطُ بكثير من حركة النظام system of particles فإننا نبدأ بوصف حركة الجسيم المفرد كَيْنَمَاتِيكياً.

1.2 طرق وصف حركة الجسيم كَيْنَمَاتِيكياً

تتحدد حركة جسيم ما بتحديد مكانه على خطٍّ المنحنى أو المستقيم الذي يتبعه الجسيم في كل لحظة زمنية. ويعرف المنحنى أو المستقيم حيث يتحرك (ينزلق) الجسيم عليه دائماً بالمسار. ولذلك فمسار الجسيم هو المَحَلُّ الهندسي locus لرأس متجه موضع الجسيم عند حركته في الفراغ بالنسبة إلى إطارِ إسنادٍ ما. وفي العادة، يمكن وصف حركة الجسيم بإحدى الطرق الثلاث الآتية: طريقة المتجهات أو الطريقة التحليلية أو الطريقة الطبيعية.

1.2.2 طريقة المتَّجِهات Vectors Method

يتحدد موضع position الجسيم في الفراغ بواسطة المُتَّجِه الذي تنطبق بدايته على مركز الإطار القصوري O، بينما تنطبق نهايته على (مركز) الجسيم المتحرك P ، **شكل 1.2**. ويرمز لهذا المتجه بالرمز **r**، $\mathbf{r} = \overline{OP}$، الذي يُعَرَّف اختصاراً بمتجه الموضع position vector. ومن الطبيعي أن تجعل حركة الجسيم P المتجهَ **r** متجةٌ متغيرٌ في مقداره واتِّجَاهه وخَطِّ عمله. ولذلك يمثل متجه الموضع دالة زمنية، أي دالة الكمية القياسية t

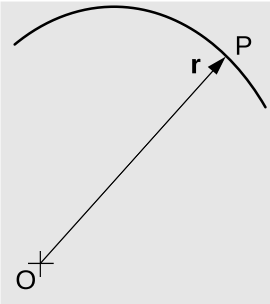
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \qquad 1.2$$

---

[2] *SI* مختصرة من التعبير الفرنسي *Systeme International*.

[3] أنظر تعريف **الجسيم المادي** الوارد في **الباب الثالث**، ص 70.

وتُعَرِّف المعادلة 1.2 حركة الجسيم في خطٍ منحنٍ، لأنها تتيح في كل لحظة زمنية رسم المتجه **r** وإيجاد مواضع الجسيم المتحرك بدلالة الزمن t. ومن الطبيعي أن تكون المعادلة 1.2 دالةً متصلةً، أي معرفةً لكل قيم الزمن t، وتفاضليةً مرتين على الأقل.



شكل 1.2

2.1.2 الطريقة التحليلية Analytical Method

تتحدد حركة الجسيم بالطريقة التحليلية بإسقاط المعادلة 1.2 على محاور الإحداثيات المختلفة

1.2.1.2 الإحداثيات الديكارتية[4] Cartesian Coordinates

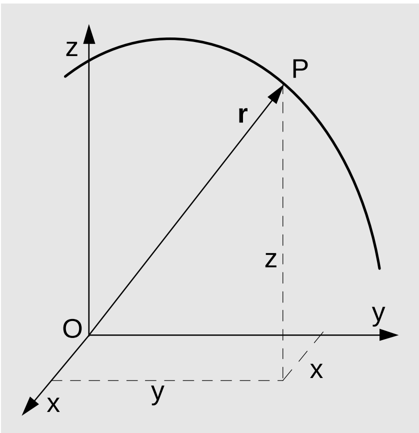
إذا عرفنا مُتَّجِه موضع الجسيم، معادلة 1.2 بدلالة مركباته

$$\mathbf{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$$

فيمكن كتابة معادلة حركته بدلالة الأجزاء

$$x = x(t)\,,\ y = y(t)\,,\ z = z(t) \qquad 2.2$$

هذه المعادلات 2.2 تمثل معادلات حركة الجسـيم في الإحداثيات الديكارتية، **شكل 2.2**. وهي دوالٌ زمنيةٌ متصلة وتفاضلية على الأقل مرتين.



شكل 2.2

وإذا ما تحرك الجسيم في مستوىً ما، وليكن Oxy، فإن حركته تتحدد بالمعادلتين الأوليتين من معادلات 2.2

$$x = x(t)\,,\ y = y(t) \qquad 1.2.2$$

أمَّا إذا تحرك الجسيم حركةً في خطٍ مستقيم، وليكن المحور Ox، فإن حركته تتحدد بالمعادلة الوحيدة

$$x = x(t) \qquad 2.2.2$$

وتدعى الحركة الممثلة بالمعادلة 2.2.2، بالحركة المســـتقيمة rectilinear motion. وتمثل المعادلات 2.2 في وقت واحد معادلة مســـار الجسيم المتحرك بالصورة البارامترية parametric، حيث يلعب الزمن t دور البارامتر المستقل. ويمكن حذف الزمن من معادلات الحركة لإيجاد معادلة مسار الجسيم بالصورة العادية، أي الصورة التي تربط الإحداثيات الثلاث، أو اثنين منها مع بعض.

2.2.1.2 الإحداثيات الأسطوانية والقطبية Cylindrical and Polar Coordinates

نستطيع تحديد حركة الجسيم المعرفة بالمعادلة الاتجاهية 1.2، بدلالة الإحداثيات الأسطوانية r، φ و z بأيٍ من الشكلين التاليين

---

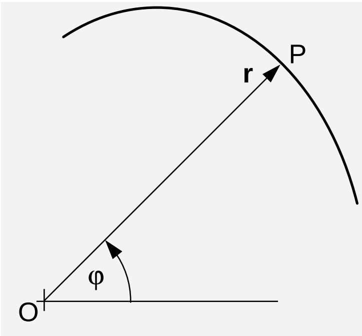
[4] نسبةً إلى **رينيه ديكارت** Rene Descartes، 1596 - 1650، رياضي وفيلسوف فرنسي ومخترع الهندسة التحليلية، وإن لم يكن بشكلها الحالي.

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ,\ z = z\,(t) \qquad 1.3.2$$

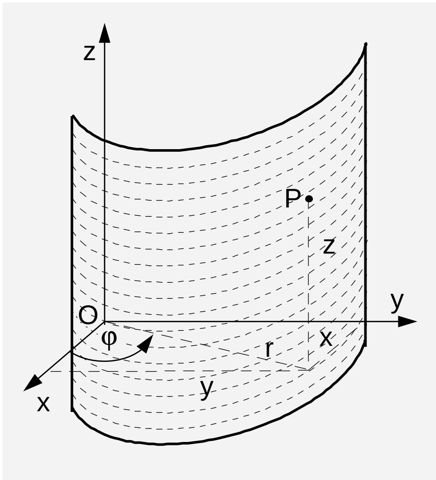
$$r = r(t)\ ,\ \varphi = \varphi\,(t)\ ,\ z = z\,(t) \qquad 2.3.2$$

حيث r بعد الجسم المتحرك عن المحور Oz، و φ الزاوية القطبية polar angle، بينما يمثل z ارتفاع الجسيم في اللحظة المعينة عن المستوى Oxy، **شكل 3.2**. والمعادلات 3.2 تمثل دوالاً متصلةً وتفاضلية على الأقل مرتين. وإذا ما تمت الحركة في مستوى ما، **شكل 4.2**، يتحدد موضع الجسيم بالإحداثيين القطبيين r و φ

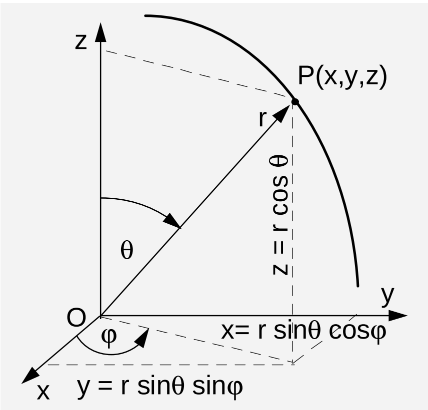
$$r = r(t)\ ,\ \varphi = \varphi\,(t) \qquad 3.3.2$$



شكل 4.2



شكل 3.2



شكل 5.2

3.2.1.2 الإحداثيات الكروية Spherical Coordinates

يمكن تحديد حركة الجسيم في الإحداثيات الكروية (الكرّية) r ، θ و φ ، **شكل 5.2**، بالشكل التالي

$$r = r(t)\ ,\theta = \theta\,(t)\ ,\ \varphi = \varphi\,(t) \qquad 4.2$$

وهذه المعادلات 4.2 معادلات متصلة وتفاضلية على الأقل مرتين.

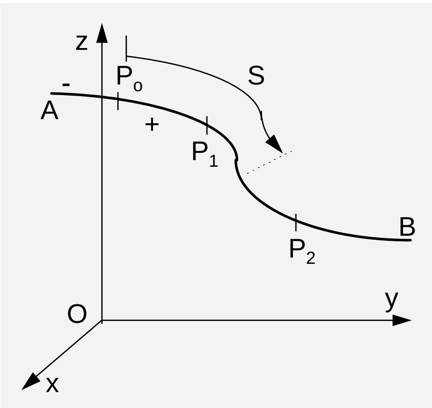
3.1.2 الطريقة الطبيعية Natural Method

يتحدد موضع الجسيم المتحرك إذا كان مساره معروفاً زمنياً بالنسبة إلى أي نقطة ثابتةٍ عليه. نفترض أن مسار الجسيم محددٌ بالنسبة لإطار الإسناد الثابت بالإحداثيات الديكارتية Oxyz بالمنحنى AB، **شكل 6.2**. نختار النقطة P_o كنقطة ثابتةٍ لبداية القياس، ثم نعتبر المسار محوراً منحنياً للإحداثيات، ونحدد عليه الاتجاهين الموجب والسالب كأي محورٍ عادي للإحداثيات. وبالتالي يتحدد موضع الجسيم P على المسار المنحني تحديداً وحيد القيمة بالإحداثي المنحني S المساوي لبعده عن نقطة البداية P_o، مقيساً على قوس المسار المعروف، وبالإشارة

المناظرة. وعند الحركة ينتقل الجسيم من موضعه الابتدائي P_o إلى مواضعه الجديدة P_1 ثم P_2..... وهلم جرّا.
وتتغير المســـافة S المحددة لموضع الجسيم على المسار المنحني بدلالة الزمن بالعلاقة

$$S = S(t) \qquad 5.2$$

التي تمثل إزاحة displacement الجسيم في الإحداثيات الطبيعية. ولذا، لوصف حركة الجسيم وتحديدها بالطريقة الطبيعية يجب تحديد مسار الجسيم و نقطة بداية القياس والاتجاه الموجب للحركة وأخيراً إزاحة الجسيم على ذلك المسار.



شكل 6.2

لكن المقدار S في المعادلة 5.2، قد يحدد موضع الجسيم المتحرك، ولا يحدد المسافة التي يقطعها الجسيم المذكور. فمثلاً إذا تحرك الجسيم من نقطة البداية P_o وحتى وصل إلى النقطة P_2 ثم رجوعاً إلى النقطة P_1 في الاتجاه المضاد ، فإن الإحداثي S في هذه اللحظة يساوي القوس P_oP_1 بينما تكون المسافة المقطوعة خلال زمن الحركة مساوية للقوسين P_oP_2 و P_2P_1. وهذه غير مساوية للإحداثي S.

وأخيراً، إذا كانت الحركة تتم في خطٍ مستقيم، وليكن Ox مثلاً، فإن إزاحة الجسيم تتبع الحركة على الإحداثي المذكور

$$x = x(t) \qquad 1.5.2$$

4.1.2 العلاقة بين الطريقة الطبيعية وطريقة الإحداثيات لتحديد الحركة

إذا عُرِفَت حركة الجسيم بالمعادلات 2.2، أو بالمعادلات 1.2.2، عندئذٍ يُمكن تعيين مسار الجسيم. **شكل 7.2** يبين إن طول القوس الأولي dS يساوي تقريباً طول الإزاحة الأولية dr، $dS=|d\mathbf{r}|$

$$d\mathbf{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad dS^2 = dr^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

أو

$$dS = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$

حيث إن $dx=\dot{x}dt$ .... وباعتبار أن المسافة المقطوعة الأولية تساوي صفراً $S_o=0$ للزمن $t=0$ فإننا نحصل بعد تكامل المعادلة الأخيرة على بعد الجسيم من نقطة البداية

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt \qquad 6.2$$

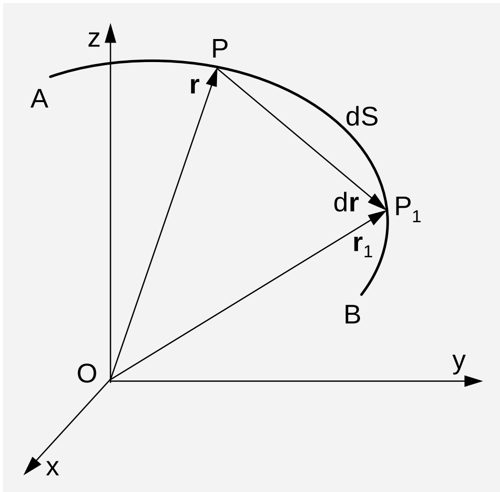
التي يمثل حساب تكاملها إزاحة الجسيم.

2.2 سرجهة الجسيم Velocity of a Particle

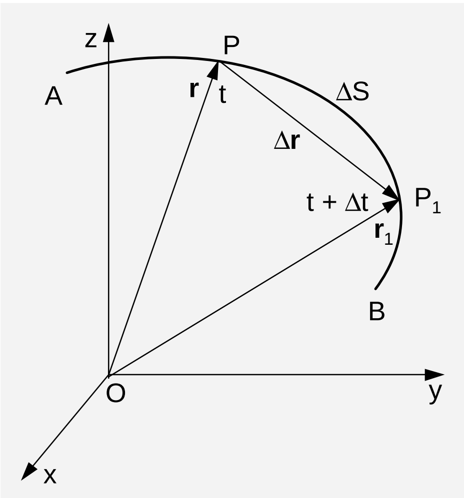
تعتبر السرجهة كمُتَّجه إحدى المميزات الكينماتيكية الأساسية لحساب حركة الجسيم. ولتحديد سرجهة جسيمٍ في لحظة ما، نحدد أولاً مفهوم السرجهة المتوسطة للجسيم خلال فترة زمنية ما. اعتبر أن الجسيم يتحرك على المسار AB، **شكل 8.2**، وإنه تواجد عند اللحظة الزمنية t في الموضع P على ذلك المسار المحدد بمتجه الموضع **r**. وإذا تحرك الجسيم وتواجد عند اللحظة الزمنية $(t+\Delta t)$ في الموضع P_1 على المسار نفسه والمحدد بالمتجه الجديد $\mathbf{r}_1$. عندئذ يدعى المتجه $\mathbf{PP}_1$ متجه إزاحة الجسيم وكما يتضح من نظرية المتجهات والمثلث PP_1O فإن

$$\mathbf{PP}_1 = \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$$

وإذا ما قسمنا متجه الإزاحة الناتج على الفترة الزمنية Δt فإننا نحصل على السرجهة المتوسطة



شكل 7.2



شكل 8.2

$$\boldsymbol{v}_{av} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \qquad 7.2$$

وحيث إن الكمية القياسية Δt كميةٌ موجبةٌ دائماً، يكون متجهُ السرجهة المتوسطة $\boldsymbol{v}_{av}$ مكافئاً لمتَّجِهِ الإزاحة $\Delta\mathbf{r}$ في الاتجاه وخط العمل، أي أنه مكافئٌ لخط عمل واتجاه حركة الجسيم.

ومن الواضح أيضاً، أنه كلما صغرت قيمة الفترة الزمنية التي حُسِبَت خلالها السرجهة المتوسطة مَيَّزَ المقدارُ $\boldsymbol{v}_{av}$ حركة الجسيم بدقةٍ أكبر. وحتى يصبح مميز الحركة هذا $\boldsymbol{v}_{av}$ غير متوقف على اختيار الفترة الزمنية، بل على اللحظة الزمنية نفسها، من الضروري تعريف المفهوم الرياضي لمشتقة مُتَّجِهِ الموضع أو السرجهة اللحظية instantaneous velocity التي تعرف بنهاية السرجهة المتوسطة $\boldsymbol{v}_{av}$ عند الزمن t، إذا ما وجدت هذه النهاية، عندما تؤول الفترة الزمنية Δt للصفر. أو رياضياً

$$\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\,\mathbf{r}}{d\,t} \qquad 8.2$$

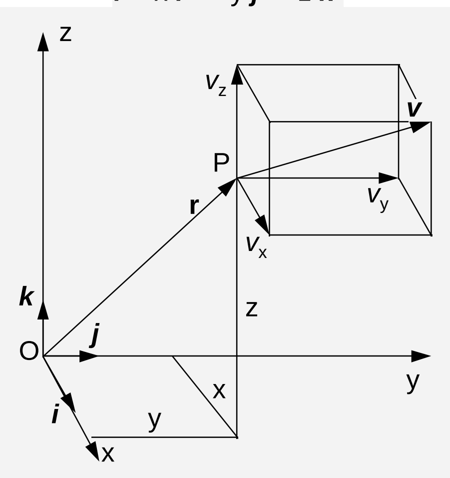
أي أن سرجهة الجسيم (اللحظية) تساوي مشتقة متجه موضع الجسيم. وحيث إن المماس في الموقع P باتجاه الحركة هو الاتجاه النهائي الذي يؤول إليه الوتر PP_1 عندما تؤول Δt للصفر، تتجه السرجهة دائماً على امتداد المماس لمسار الجسيم في ذلك الموقع وباتجاه الحركة. وبالاعتماد على تعريف السرجهة، معادلة 8.2، يمكن تعريف وَحْدَة القياس للسرعة كوَحْدَة طول مقسومة على وَحْدَة زمن. وتحدد السرعة في **النظام الدولي** للوَحدَات *SI* بالمتر لكل ثانية $[v] = [m/s]$.

1.2.2 طرق حساب سرجهة الجسيم

1.1.2.2 حركة الجسيم محددة بالإحداثيات الديكارتية

إذا افترضنا أن متجه موضع الجسيم، معادلة 1.2، محددٌ بدلالة مركباته

$$\mathbf{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$$



شكل 9.2

حيث x، y و z إحداثيات الجسيم في اللحظة t، **شكل 9.2**، فإن سرجهة الجسيم تساوي مشتقةَ متجه موضعه

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})}{dt}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \qquad 9.2$$

تتحدد مركبات السرجهة على المحاور الديكارتية الثابتة

$$v_x = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i} = \frac{dx}{dt}\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \dot{x}$$

$$v_y = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{j} = \frac{dy}{dt}\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \dot{y} \qquad 1.9.2$$

$$v_z = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} = \frac{dz}{dt}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = \dot{z}$$

حيث إن المحاور الديكارتية x ، y و z محاورٌ ثابتةٌ بشكلٍ مطلق ، فتكون متجهات الوَحْدَة الموازية لهذه المحاور ***i*** ، ***j*** و ***k*** متجهات ثابتة المقدار والاتجاه أيضاً. وتبعاً لذلك، تساوي مشتقاتها الصفر

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = 0 \qquad 10.2$$

ومن ذلك نستنتج أن مركبات السرجهة على الإحداثيات الديكارتية الثلاث هي المشتقات الأولى لإحداثيات الجسيم المناظرة، معادلات 2.2. أما مقدار هذه السرعة speed فيتحدد قياساً على المعادلة I.16

$$|\boldsymbol{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \qquad 1.11.2$$

ويميل متجه السرجهة على المحاور الديكارتية بالزوايا، معادلة I.15

$$\cos\alpha_1 = \frac{v_x}{v}\ , \quad \cos\beta_1 = \frac{v_y}{v}\ , \quad \cos\gamma_1 = \frac{v_z}{v} \qquad 2.11.2$$

حيث تدعى الزوايا α_1، β_1 و γ_1 زوايا ميل متجه السرجهة على محاور الإحداثيات الديكارتية الثابتة x ، y و z وبالترتيب.

2.1.2.2 حركة الجسيم محددةً بالإحداثيات القطبية

إذا كانت حركة الجسيم في مستوى معرفةً بالمعادلات القطبية 1.3.2، يتحدد متجها الوَحْدَة القطبيين بالطريقة التالية: متجهُ الوَحْدَة الموازي لمتجه الموضع $\mathbf{e}_r$ ومتجهُ الوَحْدَة العمودي على متجه الموضع والموازي لاتجاه الزيادة في الزاوية القطبية $\mathbf{e}_\varphi$، **شكل 10.2**.

وبينما متَّجهات الوَحْدة الديكارتية ثابتةٌ مقداراً واتجاهاً، معادلة 10.2، فإن متَّجِهات الوَحْدَة القطبية كميات متغيرة إتجاهياً. ويمكن حساب هذه الأخيرة بدلالة متَّجهات الوَحْدَة الديكارتية

$$\mathbf{e}_r = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi \qquad 12.2$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi \qquad 13.2$$

بينما مشتقات هذه المتجهات

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \{-\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi\}\frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{e}_\varphi\,\dot\varphi \qquad 14.2$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = -\{\boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi\}\frac{d\varphi}{dt} = -\mathbf{e}_r\,\dot\varphi \qquad 15.2$$

بناءً على ما تقدم، يتحدد متجه موضع الجسيم بالمعادلة الاتجاهية

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r \qquad 16.2$$

كما تتحدد سرجهة الجسيم كمشتقة متجه الموضع، معادلة 8.2

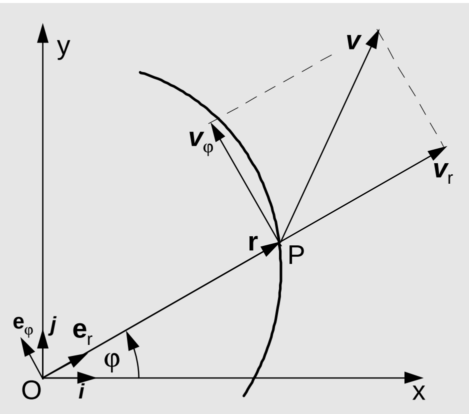
$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$$

وبتعويض المعادلة 14.2 في المعادلة الأخيرة، نجد أن

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot r\,\mathrm{e}_r + r\,\dot\varphi\,\mathrm{e}_\varphi \qquad 1.17.2$$

أو

$$\boldsymbol{v} = v_r\,\mathbf{e}_r + v_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi \qquad 2.17.2$$



شكل 10.2

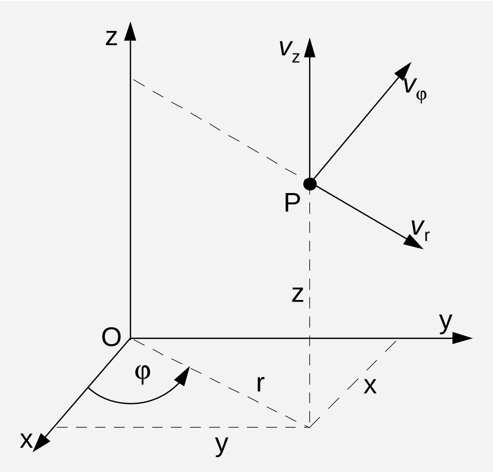
حيث إن v_r السرعة النِّصْقُطرية radial velocity التي تمثل التغير في مقدار متَّجِه الموضع، بينما v_φ السرعة المستعرِضَة transverse velocity التي تمثل التغير في اتجاه متجه الموضع. ويتحدد مقدار السرعتين النصقطرية والمستعرِضَة بالعلاقتين التاليتين

$$v_r = \dot r \quad , v_\varphi = r\,\dot\varphi \qquad 18.2$$

وبالتالي فسرعة الجسيم

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2} \qquad 19.2$$

3.1.2.2 حركة الجسيم محددةً بالإحداثيات الأسطوانية



شكل 11.2

بالاعتماد على **شكل 11.2**، يمكن كتابة العلاقة بين الإحداثيات الاسطوانية والديكارتية كما يلي

$$r = r(t)\,,\ \varphi = \varphi(t),\ z = z(t) \qquad 20.2$$

حيث إن r ، φ و z دوال زمنية معروفة كالمعادلات 3.2.

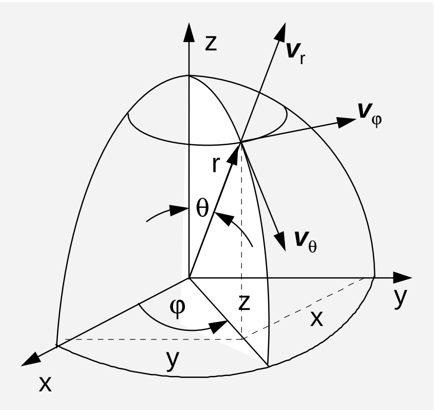
مركبات السرجهة

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\varphi = r\,\dot{\varphi} \qquad v_z = \dot{z}(t) \qquad 21.2$$

وبالتالي فالسرعة تأخذ القيمة

$$|\boldsymbol{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2} \qquad 22.2$$

4.1.2.2 حركة الجسيم محددةً بالإحداثيات الكروية



شكل 12.2

يمكن كتابة العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والكروية، **شكل 12.2**

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi \qquad z = r\cos\theta \qquad 23.2$$

حيث إن $r = r(t)$، $\varphi = \varphi(t)$ و $\theta = \theta(t)$ دوال زمنيةً محددة كالمعادلات 4.2. تتحدد مركبات سرجهة الجسيم بالمشتقات الأولى للإحداثيات الديكارتية المناظرة. فمن معادلات 23.2 نجد أن

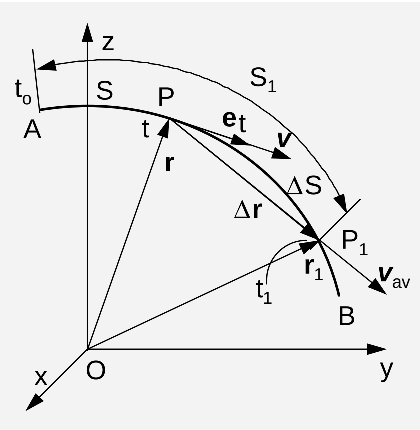
$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\,\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r\,\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \\ v_y &= \dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\,\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \\ v_z &= \dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\,\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned} \qquad 24.2$$

وقياساً على المعادلة 22.2 نحسب سرعة الجسيم بقليلٍ من الاختصار

$$|\boldsymbol{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2} \qquad 25.2$$

5.1.2.2 حركة الجسيم محددةٌ بالإحداثيات الطبيعية

لنعتبر أن مسار الجسيم محددٌ رياضياً بالمعادلة 5.2. إذا انتقل الجسيم خلال الفترة الزمنية Δt من الموضع P إلى الموضع P_1، وبلغت إزاحته على امتداد منحنى الحركة AB، **شكل 13.2**، المقدار ΔS، والمساوية تقريباً لطول الوتر PP_1، أو $\Delta \mathbf{r}$. سرجهة الجسيم المتوسطة



شكل 13.2

$$\boldsymbol{v}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \qquad 26.2$$

وعلى نفس المنوال، يعرف معدل تغير الإزاحة عند الزمن t كنهاية خارج القسمة، معادلة 26.2، إذا ما وجدت هذه النهاية، عندما تؤول الفترة الزمنية إلى الصفر

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

أو كمشتقة متجه الموضع

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad 27.2$$

كما يمكن كتابة المعادلة الأخيرة، باستخدام طول القوس الأولي dS بالشكل التالي

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dS}\frac{dS}{dt} \qquad 28.2$$

حيث إن dS يساوي تقريباً طول الوتر الأولي $|d\mathbf{r}|$، $dS = |d\mathbf{r}|$، أو $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_t\, dS$. وعليه يكون

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{r}}{dS} \qquad 29.2$$

مُتَّجِهَ وَحْدَةٍ باتجاه المماس على مسار الجسيم. كما تكتب السرجهة، معادلة 28.2، بالشكل المقتضب التالي

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dS}{dt}\mathbf{e}_t \Rightarrow \boldsymbol{v} = v\, \mathbf{e}_t \qquad 30.2$$

مسقط سرجهة الجسيم على (مماس) حركته يعطي السرجهة المماسية tangential velocity، والتي تساوي مشتقة الإحداثي الطبيعي S

$$v_t = \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{e}_t = \frac{dS}{dt}\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t \;\Rightarrow\; v_t = \frac{dS}{dt} = \dot{S} \qquad 31.2$$

لأن حاصل الضرب القياسي لمتَّجِه الوَحْدَة في نفسه يساوي الوَحْدَة $\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t = 1$. وتتحدد إزاحة الجسيم عند الحركة خلال الفترة الزمنية الممتدة من t_0 وحتى t_1 بالتكامل المحدود، **شكل 13.2**

$$S_1 = \int_{t_0}^{t_1} v_t\, dt \qquad 32.2$$

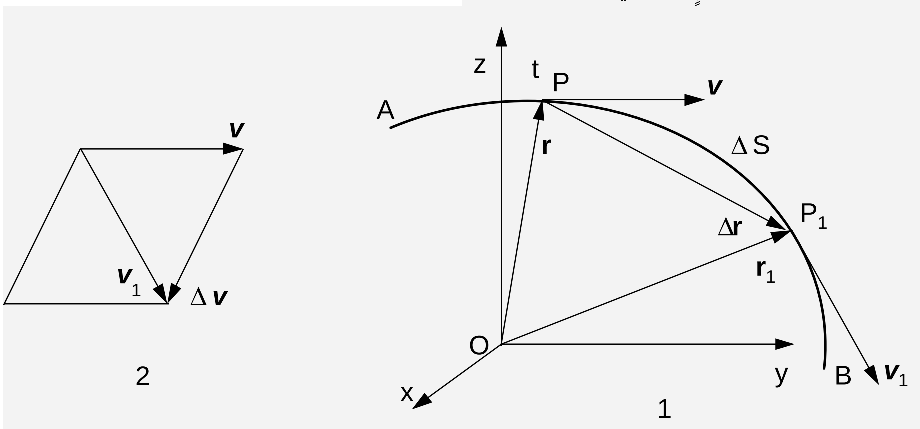
3.2 متَّجِه تسارع الجسيم Acceleration Vector of a Particle

يعرف متجه تسارع الجسيم بالكمية المتجهة التي تميز تغير مقدار واتجاه سرجهة الجسيم بالنسبة للزمن. وكما ورد سابقا عند تعريف السرجهة والسرجهة المتوسطة نحدد أولاً متجه التسارع المتوسط.

اعتبر جسيماً متحركاً تواجد عند اللحظة الزمنية t في الموضع P وكانت سرجهته $\boldsymbol{v}$، **شكل 14.2**. وفي اللحظة الزمنية t_1 ، $t_1 = t + \Delta t$ ، تواجد الجسيم في الموضع P_1 وأصبحت سرجهته $\boldsymbol{v}_1$. هذا يعني أن سرجهة الجسيم اكتسبت خلال الفترة الزمنية Δt، $\Delta t = t_1 - t$ تغيراً مساوياً $\Delta \boldsymbol{v}$، $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}$. ويُحَدِّد خارج قسمة متجه تغير السرجهة $\Delta \boldsymbol{v}$ على الفترة الزمنية Δt متجه التسارع المتوسط للجسيم

$$\mathbf{a}_{av} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \qquad 33.2$$

ومن الواضح أن متجه التسارع المتوسط $\mathbf{a}_{av}$ موازٍ للمتجه $\Delta \boldsymbol{v}$، أي أنه يتجه نحو تقعر منحنى المسار. ويعرف معدل تغير متجه التسارع المتوسط بأنه نهاية خارج قسمة المعادلة 33.2، إذا وجدت هذه النهاية، عندما يؤول المقدار Δt للصفر. أو كمفهومٍ رياضيّ مشتقة السرجهة



شكل 14.2

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{a}_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{d\,\boldsymbol{v}}{d\,t} \qquad 34.2$$

وبربط المعادلتين 34.2 و8.2 ينتج للتو أن

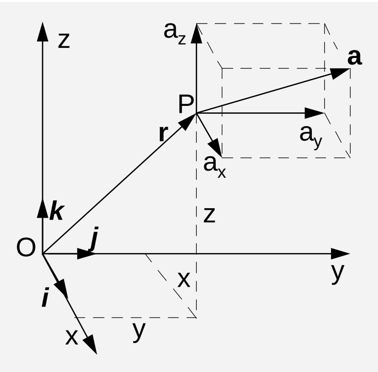
$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad 35.2$$

أي أن متجه التسارع (اللحظي) في اللحظة الزمنية t، يساوي مشتقة سرجهة الجسيم أو المشتقة الثانية لمتجه موضع الجسيم، وبصيغةٍ مكافئةٍ يساوي التسارع مشتقة السرجهة أو مشتقة متجه الموضع الثانية. وبالاعتماد على تعريف التسارع، المعادلتان 34.2 و35.2 يكون بعده الفيزيائي الطول مقسوماً على مربع الزمن. وفي النظام الدولي للوَحَدَات *SI* يحدد التسارع بالمتر لكل ثانية لكل ثانية $[\,a\,] = [m / s^2]$.

1.3.2 طرق حساب التسارع

1.1.3.2 حركة الجسيم محددة بالإحداثيات الديكارتية

إذا كانت حركة جسيمٍ محددةٌ بالمعادلات 2.2، يتحدد متجه تسارع الجسيم كمشتقة سرجهة الجسيم الأولى أو كمشتقة ثانية لمتجه الموضع



شكل 15.2

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k} \qquad 36.2$$

مركبات التسارع على محاور الإحداثيات الديكارتية، شكل 15.2

$$a_x = \mathrm{a}\cdot\boldsymbol{i} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}$$

$$a_y = \mathrm{a}\cdot\boldsymbol{j} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} \qquad 1.36.2$$

$$a_z = \mathrm{a}\cdot\boldsymbol{k} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}$$

بينما يتحدد مقدار التسارع بالعلاقة الرياضية

$$\left|\mathbf{a}\right| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \qquad 1.37.2$$

ويكون ميله على المحاور الديكارتية

$$\cos\alpha_2 = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta_2 = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{a_z}{a} \qquad 2.37.2$$

حيث إن α_2، β_2 وγ_2 الزوايا التي يميل بها مُتَّجِه التسارع على محاور الإحداثيات الديكارتية الثابتة x، y و z بالترتيب.

2.1.3.2 حركة الجسيم محددة بالإحداثيات القطبية

إذا كانت سرجهة الجسيم معرفةً رياضياً بالمعادلة 1.17.2، فإن تسارع الجسيم يعرف بالمشتقة الأولى لسرجهته

$$a = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\mathbf{e}_\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} \qquad 38.2$$

وباستبدال مشتقتي مُتَّجِهي الوَحْدَة القطبيين، من المعادلتين 14.2و15.2، ثُم ترتيب الناتج نجد أن التسارع

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} + r\left\{\frac{d\varphi}{dt}\right\}^2\right]\mathbf{e}_r + \left[r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right]\mathbf{e}_\varphi \qquad 39.2$$

يتكون في الإحداثيات القطبية من المركبتين: النِّصْقُطْرية

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} + r\left\{\frac{d\varphi}{dt}\right\}^2 \qquad 1.40.2$$

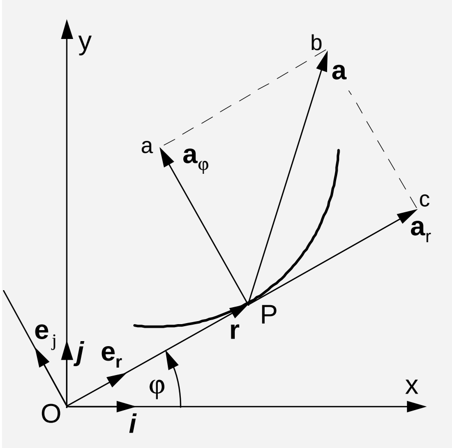
والمستعرِضَة

$$a_\varphi = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} \qquad 2.40.2$$

كما يتحدد مقدار التسارع بالعلاقة الرياضية

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} \qquad 41.2$$

حيث يبين **شكل** 6.2، طريقة حسابه من متوازي الأضلاع Pabc. كما يمكن حساب تسارع الجسيم إذا ما عرفت الحركة بالإحداثيات الاسطوانية أو الكروية بمفاضلة السرعة، معادلات 21.2 و24.2، أو بالمشتقات الثانية لمعادلات الحركة بالإحداثيات المذكورة، معادلات 20.2 و 23.2 بالترتيب.



شكل 16.2

2.3.2 حركة الجسيم محددةٌ بالإحداثيات الطبيعية

يتحدد متجه تسارع الجسيم بمشتقة السرجهة في الإحداثيات الطبيعية. فبمفاضلة طرفي المعادلة 30.2 يكون متجه التسارع

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} \qquad 42.2$$

إن تحليل المعادلة الاتجاهية 42.2 يبين أن الحد الأول يمثل حاصل ضرب مشتقة السرعة أو التسارع المماسي $a_t = \frac{dv}{dt}$ ومتجه الوَحْدَة المماسي $\mathbf{e}_t$، كما يمثل الحد الثاني حاصل ضرب السرعة ومشتقة متجه الوَحْدَة المماسي $\frac{d\mathbf{e}_t}{dt}$. ولإيجاد الحد الثاني مقداراً واتجاهاً ننطلق من أن مشتقة حاصل الضرب القياسي لمتجهي الوحدة تساوي الصفر

$$\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t)}{dt} = 2\mathbf{e}_t \cdot \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = 0$$

$$\mathbf{e}_t \cdot \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = 0 \qquad 43.2$$

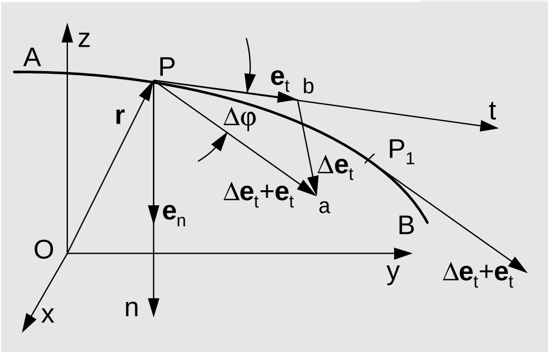
وهذا يعني هندسياً أن المتجهين $\mathbf{e}_t$ و $\frac{d\mathbf{e}_t}{dt}$ متعامدان. وحيث أن المتَّجِه $\mathbf{e}_t$ موازٍ للمماس في النقطة P، فإن المتجه الثاني $\frac{d\mathbf{e}_t}{dt}$ يعامد $\mathbf{e}_t$، والاثنان ينطبقان على المستوى Pnt. لذلك، من الممكن كتابة المتجه الثاني على النحو التالي

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{|d\mathbf{e}_t|}{dt}\mathbf{e}_n \qquad 44.2$$

حيث $\mathbf{e}_n$ مُتَّجِهُ وَحْدَةٌ عَمودي باتجاه تقعر المنحنى. أما مُتَّجِهُ الوَحْدَةُ المماسي $\mathbf{e}_t$ فهو ذو مقدار ثابت، لكنه متغير الاتجاه، ويتحدد مقدار مشتقته بمعرفة مقدار المتجه $\Delta\mathbf{e}_t$ من المثلث Pab، **شكل 17.2**. إذ أن

$$|\Delta \mathbf{e}_t| = 2|\mathbf{e}_t|\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 2\times 1\times \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \quad\Rightarrow\quad |\Delta \mathbf{e}_t| = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

لأن $|\mathbf{e}_t|=|\mathbf{e}_t+\Delta\mathbf{e}_t|=1$. وبعد قسمة طرفي المعادلة الناتجة على Δt يكون



شكل 17.2

$$= 2\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

وبصيغة النهاية

$$= \lim_{\frac{\Delta\varphi}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

ومنها

$$\frac{|d\mathbf{e}_t|}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad 45.2$$

لأن

$$\lim_{\frac{\Delta\varphi}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{d(\sin x)}{dx} = 1$$

من جهة أخرى، يمكن كتابة السرعة الزَّاويَّة بالشكل التالي، معادلة 30.2

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dS}\frac{dS}{dt} = \frac{1}{R}v = \frac{v}{R} \qquad 1.45.2$$

لإن $R=\frac{dS}{d\varphi}$ ، نصف قطر الانحناء. وإذا استبدلنا السرعة الزاوية في المعادلة 45.2 بقيمتها من المعادلة 1.45.2، نستطيع كتابة مشتقة متجه الوحدة المماسي بالصيغة التالية

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{v}{R}\mathbf{e}_n \qquad 46.2$$

وتؤول المعادلة 42.2 ومتجه التسارع إلى الشكل التالي

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{R}\mathbf{e}_n \qquad 47.2$$

أي يتكون متجه تسارع الجسيم في الإحداثيات الطبيعية من المركبتين التاليتين: المماسية، الناتجة من إسقاط متجه التسارع على المحور المماسي وهذه موازية لمتجه الوَحْدَة المماسي، والعمودية، الناتجة من إسقاط متجه التسارع على المحور العمودي، وهذه موازية لمتجه الوَحْدَة العمودي. والمركِّبتان تشكلان مستوى واحد هو مستوى التلامس osculating plane، المحدد بالنقاط Pnt، شكل 17.2، على منحنى الحركة، كما تحددان رياضياً بالعلاقتين التاليتين

$$a_t = \frac{dv}{dt}, a_n = \frac{v^2}{R} \qquad 48.2$$

بعض الحالات الخاصة لحركة الجسيم

الحركة المستقيمة منتظمة السرعة Uniform Rectilinear Motion

في هذه الحالة يساوي تسارع الجسيم الصفر، $\mathbf{a} = 0$. وإذا ما كانت الحركة معرفةً بالمعادلة 2.2.2 فإن المعادلة التفاضلية التي تعرف حركته تأخذ الشكل التالي $\mathbf{a} = \ddot{x}\,\boldsymbol{i} = 0$، وبالتالي نكتب سرجهته بالصيغة $\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i} = \text{const.}$. وإذا ما أجرينا التكامل على المعادلة الأخيرة نحصل على معادلة الحركة $x = x_o + v\,t$ التي تنطوي على الثابت x_o كمحدد لموضع الجسيم الأولي.

الحركة المستقيمة Rectilinear Motion

إذا كان مسار الجسيم المتحرك خطاً مستقيماً ، فإن نصف قطر الانحناء في المعادلة 48.2 ، يؤول إلى ما نهاية $R \to \infty$، ويتلاشى تبعاً لذلك التسارع العمودي $a_n = 0$. وهذا يعني أن تسارع الجسيم يساوي التسارع المماسي فقط، $a = a_t$. ولأن السرعة لا تتغير في الاتجاه، بل يكون التغير في مقدارها، فإننا نستخلص من ذلك أن **التسارع المماسي يبين التغير في مقدار السرجهة.**

وإذا ما كانت الحركة معرفةً بالمعادلة 2.2.2 فإن المعادلة التفاضلية التي تعرف حركته تأخذ صيغة التسارع المماسي $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t = \ddot{x}\boldsymbol{i} \neq 0$. وبالتالي نكتب سرجهته $\boldsymbol{v} = \dot{x}\,\boldsymbol{i} = (v_o + a\,t)\,\boldsymbol{i}$ ، حيث v_o السرعة الابتدائية للجسيم. وإجراء التكامل على المعادلة الأخيرة يعطينا معادلة الحركة المحددة $x = x_o + v_o\,t + \frac{1}{2}a\,t^2$ التي تنطوي على الثابت x_o كمحدد لموضع الجسيم الأولي. وفي حالاتٍ كثيرة يكتب التسارع الثابت بدلالة حاصل ضرب السرعة ومشتقتها بدلالة المسافة $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \text{const.}$. وبالتالي فبإجراء التكامل نحصل على معادلة السرعة والمسافة بدون الزمن $v^2 = v_o^2 + 2\,a\,(x - x_o)$.

الحركة المنحنية منتظمة السرعة Uniform Curvilinear Motion

تدعى حركة الجسيم في خطٍ منحنٍ بالمنتظمة إذا بقي مقدار السرعة ثابتاً طوال الوقت $v = \text{const.}$. وتبعاً لذلك، يتلاشى التسارع المماسي، $a = a_t = 0$. والتالي يساوي تسارع الجسيم تسارعَه العمودي فقط، $a = a_n$. ولأن السرعة لا تتغير في المقدار، بل يكون التغير في اتجاه السرجهة، فإننا نستخلص من ذلك أن **التسارع العمـــودي يبين التغير في اتجاه السرجهة.**

وإذا ما كانت الحركة معرفةً بالمعادلة 5.2 فإن مركبتي تسارعه، قياساً على المعادلة 48.2، تأخذان الشكل التالي $a_t = \ddot{S} = 0\ ;\ a_n = \frac{v^2}{R} \neq 0$. وبالتالي تكتب معادلة الحركة من المعادلة الثانية $S = S_o + v\,t$، حيث S_o الإحداثي المنحني الابتدائي للجسيم. ومن الطبيعي أن نلاحظ أن حركة هذا الجسيم منتظمةً وفي خطٍ منحنٍ، مع أن تسارعه (العمودي) لا يساوي الصفر.

الحركة المنحنية منتظمة التَّغيُّر Uniformly Accelerated Curvilinear Motion

وهي الحركة التي يكون فيها التسارع المماسي مقدارً ثابتاً طوال الوقت $a_t = \frac{dv}{dt} = const.$. وتُحسب سرعة الجسيم من التكامل المحدود لهذه العلاقة، فنحصل على المعادلة $v = v_o + a_t\, t$. أمّا مقدار إزاحة الجسيم فيتحدد من تكاملٍ آخر لمعادلة السرعة بالعلاقة الزمنية التالية $S = S_o + v_o\, t + \frac{1}{2} a_t\, t^2$.

حـــل المســـائل

يقوم حل مسائل كينماتيكا الجسيم على تحديد الكميات الكينماتيكية **a**، ***v***، t و S مضافاً إليها معادلة مسار الجسيم أو معادلة الحركة. إن معرفة اثنتين من الكميات الأربع الواردة أعلاه يحدد بالضرورة الكميتين الباقيتين بأيٍّ من الطريقتين التاليتين: التفاضل المتتالي أو التكامل المتتالي[5]. كما يمكن الحصول على معادلة مسار الجسيم بحذف الزمن أو تنحيته من معادلات الحركة لنحصل على الشكل الذي يربط الإحداثيات المعرفة للحركة مع بعض. وعلى ذلك نستطيع تمييز مسألتين أساسيتين في الكينماتيكا:

1 - حركة الجسيم معطاة بأيةٍ طريقة، الاتجاهية، معادلة 1.2 أو التحليلية، معادلات 2.2 - 4.2 أو حتى الطريقة الطبيعية، معادلة 5.2. والمطلوب حساب باقي الكميات الكينماتيكية، كالسرجهة والتسارع، الذي يتم بحساب التفاضل لمشتقة الموضع أو مشتقة السرجهة بالترتيب.

2 - بعض الكميات الكينماتيكية معطاة، والمطلوب تحديد معادلتي حركة الجسيم والمسار مضافاً إليهما باقي الكميات الكينماتيكية. ويتم حل هذه المسألة بالاختيار الأنسب للمعادلة المعينة التي تربط تلك الكميات بعضها مع بعض، وتبعاً لذلك يمكن تمييز الحالات الأربع التالية

1.2 - التسارع ثابت، $a = const.$ من هذه العلاقة نحسب السرعة من التكامل الأول $v = a\int dt + v_o$ لنحصل على $v = a\,t + v_o$. ومن هذه الأخيرة نحسب الإزاحة من التكامل $S = \int v\, dt + S_o$، فنحصل على $S = S_o + v_o\, t + \frac{1}{2} a\, t^2$.

2.2 - التسارع دالةٌ زمنية، $a = f(t)$. نعوض العلاقة $a = dv/dt$ ونحسب السرعة من التكامل $v = \int f(t)\, dt + v_o$، ثُمَّ نحسب الإزاحة من التكامل $S = \int v dt + S_o$.

3.2 - التسارع دالةٌ سرعة، $a = f(v)$. نعوض العلاقة $a = dv/dt$، ثُمَّ نحسب التكامل $\int dv/f(v) = \int dt + C$، فنجد السرعة بالصيغة العامة $v = g(t)$. ومن ثَمَّ نحسب الإزاحة من التكامل $S = \int g(t) dt + S_o$.

4.2 - التسارع دالةٌ إزاحة، $a = f(S)$. لحساب السرعة كدالة إزاحة نعوض في العلاقة $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS}\frac{dS}{dt} = v\frac{dv}{dS}$، ثُمَّ من التكامل $\int f(S)\, dS = \int v\, dv + C$، نجد السرعة كدالة جديدة بالصيغة العامة $v = g(S)$، وباستبدال $v = dS/dt$ نحسب الإزاحة من التكامل $S = \int g(S) dt + S_o$.

[5] إنها لسمةٌ جديرةٌ بالاهتمام تعريف الحركة كاملاً دون الاستناد إلى مشتقاتٍ أعلى من الثانية، أو تكاملات أكبر من المضاعفة.

أسـئـلـةٌ مـحـلـولة

سـؤال م 1.2

تتحدد حركة جسيمٍ في المستوى الأفقي بالمعادلة الاتجاهية

$$\mathbf{r} = (2t^2 + 2)\,\boldsymbol{i} + 5t^2\,\boldsymbol{j} \ \ [\mathrm{m}] \qquad 1$$

اكتب معادلة مسار الجسيم، مبيناً نقطة بداية الحركة واتجاهها وحدِّد السرعة وإزاحة الجسيم زمنياً.

الحـل

يمكن كتابة المعادلة الاتجاهية 1 كمعادلتين قياسيتين

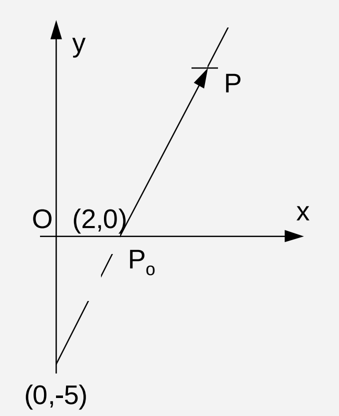
$$x = 2t^2 + 2 \quad , \quad y = 5t^2 \qquad 2$$

أو بعد حذف البارامتر t ، في هذه الحالة t^2

$$t^2 = \frac{x-2}{2} = \frac{y}{5}$$

أو

$$y = 2.5\,x - 5 \qquad 3$$



شـكل م 1.2

والتي تمثل معادلة مسار الجسيم. تتحدد نقطة بداية الحركة بقيم x و y عندما تكون t = 0، أو

$$x_{t=0} = 2 \ , \ y_{t=0} = 0 \qquad 4$$

ولتعيين اتجاه الحركة نحسب قيم الإحداثيات عندما يصل الزمن إلى ما لا نهاية

$$x|_{t=\infty} = \infty \ , \ y|_{t=\infty} = \infty \qquad 5$$

وبالتالي سيتحرك الجسيم من نقطةٍ بداية الحركة $P_o(2,0)$ وعلى امتداد الخط المستقيم P_oP، وفْقَاً للمعادلة 3 ، نحو P.

مركبات سرعة الجسيم

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4t \ , \ v_y = \frac{dy}{dt} = 10t$$

ومن العلاقة الرياضية I.16 نجد (محصلة) السرعة

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(10t)^2 + (4t)^2} \Rightarrow v = \sqrt{116}\ t\ [\mathrm{m/s}] \qquad 6$$

إزاحة الجسيم، معادلة 32.2، وللقيمة $S_o=0$، يكون

$$S = \int_0^t v\,dt = \int_0^t \sqrt{116}\,t\,dt \Rightarrow S = \sqrt{29}\,t^2 \qquad 7$$

سـؤال م 2.2

تتحدد حركة جسيم في المستوى الأفقي Oxy بالمعادلة الاتجاهية

$$\mathbf{r} = (2\sqrt{2}\sin t)\,\boldsymbol{i} + (8\cos 2t)\,\boldsymbol{j} \ \ [\mathrm{cm}] \qquad 1$$

اكتب معادلة المسار، وحدِّد نقطة بداية الحركة وسرعة الجسيم بدلالة الزمن t وذلك عند اللحظة $t = \pi/4$ [s].

الحـل

يمكن كتابة المعادلة الاتجاهية 1 كمعادلتين قياسيتين

$$x = 2\sqrt{2}\sin t \qquad 2$$

$$y = 8\cos 2t = 8\{1 - 2\sin^2 t\} \qquad 3$$

وبحذف الزمن t منهما ينتج معادلة المسار

$$y = 8 - 2x^2 \qquad 4$$

والتي تمثل معادلة القطع المكافئ parabola. بداية الحركة

$$x_{t=0} = 0 \ , \ y_{t=0} = 8$$

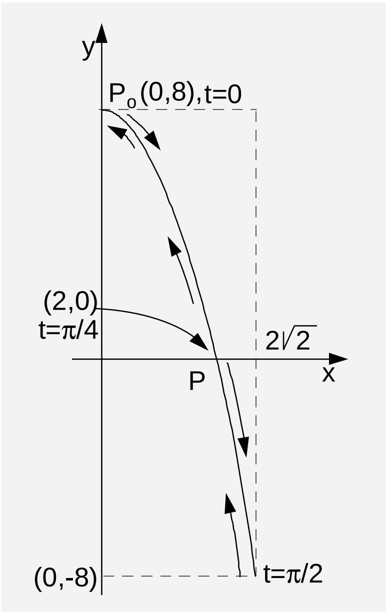
أي أن نقطة بداية الحركة $P_o(0,8)$. ولقيم t المتغيرة تتحدد الحركة بتحديد الإحداثيين x و y

$$|x_{max}| = |2\sqrt{2}\sin t|_{t=\pi/2\ [s]} = 2\sqrt{2} \qquad 5$$

$$|y_{max}| = |8\cos 2t|_{t=0\ [s]} = 8 \qquad 6$$

أي أن حركة الجسيم ستكون محصورةً بحيث إن

$$0 \le x \le 2\sqrt{2} \quad \& \quad -8 \le y \le 8 \qquad 7$$



شـــكل م 2.2

مركبات سرعة الجسيم في اللحظة t

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{2}\cos t \ , \ \& \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -16\sin 2t \qquad 8$$

ومن العلاقة الرياضية 16.I نحسب السرعة (المحصلة)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}\cos t)^2 + 256(\sin 2t)^2}$$

$$v = \sqrt{8\cos^2 t\,(1 + 128\sin^2 t)} \qquad 9$$

وعندما تكون $t = \pi/4$ [s] فإن السرعة

$$v = 16.13\ [cm/s] \qquad 10$$

سؤال م 3.2

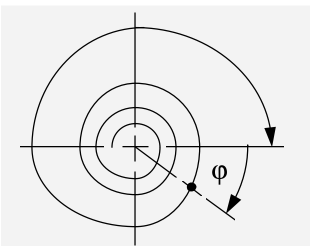
تتحدد حركة جسيم في مستوى بالعلاقة القطبية

$$v_\varphi = -(1+\varphi)\,v_r \qquad 1$$

أوجد معادلة المسار ومعادلات الحركة للشروط الكينماتيكية التالية

$$t_0 = 0 \Rightarrow \varphi_o = 0 \ , \ r_o = 0 \quad \& \quad S = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}ab$$

حيث إن a و b ثابتان و S السرعة القطاعية.



شكل م 3.2

الحـــل

من المعادلات 17.2 والمعادلة 1 ينتج أن

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = -(1+\varphi)\,\dot{r} \qquad 3$$

أو

$$\frac{dr}{r} = -\frac{d\varphi}{1+\varphi} \tag{4}$$

وبإجراء التكامل ينتج معادلة المسار

$$\ln r = -\ln(1+\varphi) + \ln C_1 \Rightarrow r = \frac{C_1}{1+\varphi} \tag{5}$$

وبتعويض الشروط الابتدائية 2 ينتج أن $C_1 = b$ ومعادلة المسار 5 تتبع العلاقة التالية

$$r = \frac{b}{1+\varphi} \tag{6}$$

والتي تمثل معادلة لولب زائدي hyperbolic spiral، شكل م 3.2. من جهةٍ أخرى، تتحدد معادلات حركة الجسيم من السرعة القطاعية، معادلة 2

$$\dot{\varphi} = \frac{ab}{r^2} \tag{7}$$

وباستبدال قيمة r من المعادلة 6 وتعويضها في المعادلة 7 ينتج أن

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{ab(1+\varphi)^2}{b^2} \Rightarrow \frac{d\varphi}{(1+\varphi)^2} = \frac{a}{b}dt \tag{8}$$

وإجراء التكامل على طرفي هذه المعادلة

$$-\frac{1}{1+\varphi} = \frac{a}{b}t + C_2 \tag{9}$$

حيث يتحدد الثابت C_2 من الشروط الابتدائية للحركة، معادلات 2، $C_2 = -1$. وتبعاً لذلك تكتب المعادلة 9 بالصيغة البارامترية للإحداثي الزاويّ

$$\varphi = \frac{at}{b-at} \tag{10}$$

كمعادلة أولى لحركة الجسيم. وبتعويض φ في المعادلة 6 بقيمتها من المعادلة 10 نجد أن

$$r = \frac{b}{1+\varphi} = \frac{b}{1+\frac{at}{b-at}} \Rightarrow r = b - at \tag{11}$$

المعادلة الثانية لحركة الجسيم. المعادلتان 10 و11 تُمثلان حركة الجسيم في الإحداثيات القطبية، بينما تُعَرِّف المعادلة 6 مسار الجسيم.

ملحوظة: يمكن حل هذا السؤال بطريقةٍ أخرى، وذلك بحساب مشتقة r من المعادلة 3، واستبدال $\dot{\varphi}$ الناتجة بدلالة الشروط الابتدائية والسرعة القطاعية بالتحديد، ثم حساب r و φ كدوالٍ زمنية.

سؤال م 4.2

إذا عرف التسارع كدالة الإحداثي المنحنى S للحركة

$$a = e^S \quad [m/s^2] \tag{1}$$

فما السرعة و S كدالتين زمنيتين؟ اعتبر الشروط الابتدائية للحركة: $t_o = 0, v_o = 0$ & $S_o = \ln 4.5$.

الـــحـــل

ننطلق من المعادلة 1 المعطاة ضمن متن السؤال فنكتب

$$a = e^S \Rightarrow v\,dv = e^S\,dS \Rightarrow \frac{v^2}{2} = e^S + C_1$$

وللشروط الابتدائية المعطاة يكون

$$0 = e^{\ln 4.5} + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -4.5 \tag{2}$$

ولذلك فالسرعة

$$v = \sqrt{2e^S - 9} \quad [\mathrm{m/s}] \tag{3}$$

من جهةٍ أخرى، $dS = v\, dt$، ولذلك فإجراء التكامل على المعادلة 3 نجد أن

$$\frac{dS}{\sqrt{2e^S - 9}} = dt \tag{4}$$

إذا افترضنا المتغير

$$u^2 = 2e^S - 9 \quad \Rightarrow \quad u\, du = e^S\, dS$$

فإن

$$dS = \frac{2u\, du}{u^2 + 9}$$

ولذلك نكتب المعادلة 4 بالصيغة الجديدة

$$\frac{2u\, du}{(u^2 + 9)u} = dt \tag{5}$$

حيث يعطي حلها

$$t = \frac{2}{3}\arctan\frac{u}{3} = \frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{2e^S - 9}}{3}$$

أو بالشكل المقتضب التالي

$$e^S = \frac{9}{2}\left\{\tan^2\frac{3t}{2} + 1\right\} \tag{6}$$

وبربط هذه المعادلة بالمعادلة 1 نجد التسارع كدالة زمنية

$$a = \frac{9}{2}\left\{\tan^2\frac{3t}{2} + 1\right\} \tag{7}$$

وتكامل معادلة التسارع يعطي السرعة

$$v = \frac{9}{2}\int\left(\tan^2\frac{3t}{2} + 1\right)dt + C_2 \Rightarrow v = 3\tan\frac{3t}{2} \tag{8}$$

حيث أن الثابت $C_2 = 0$.

سؤال م 5.2

تتحدد سرجهة جسيمٍ في مستوى بالعلاقة الاتجاهية

$$\boldsymbol{v} = (t+1)\,\boldsymbol{i} + 2(t+1)^2\,\boldsymbol{j} \quad [\mathrm{m}] \tag{1}$$

أكتب معادلة مساره. وما موضع الجسيم، سرعته وتسارعه في اللحظة $t = 2[\mathrm{s}]$ ؟ الجسيم تواجد في اللحظة الابتدائية $t_0=0$ في الموضع $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

الـــحـــل

مركبات السرجهة، من المعادلة 1

$$v_x = (t+1) \quad [\mathrm{m/s}] \tag{2}$$

$$v_y = 2(t+1)^2 \ [m/s] \quad 3$$

والإحداثي x يساوي تكامل مركبة السرجهة الأفقية

$$x = \int (t+1)\,dt + C_x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(t+1)^2 + C_x \quad 4$$

ومن الشروط الابتدائية t=0، نجد قيمة الثابت

$$\Rightarrow \quad C_x = 0 \quad 5$$

وتبعاً لذلك يؤول الإحداثي x، معادلة 4، للشكل التالي

$$x = \frac{1}{2}(t+1)^2 \quad 6$$

وبتكرار الشيء نفسه لمركبة السرعة الرأسية v_y نجد الإحداثي y

$$y = \int v_y\,dt + C_y \quad \Rightarrow \quad y = \int_0 2(t+1)^2\,dt + C_y$$

$$y = \frac{2}{3}(t+1)^3 + C_y \quad 7$$

ومن الشروط الابتدائية t=0، نجد قيمة الثابت C_y

$$\Rightarrow C_y = 0 \quad 8$$

وتبعاً لذلك يؤول الإحداثي y، معادلة 7، للشكل التالي

$$y = \frac{2}{3}(t+1)^3 \quad 9$$

وبحذف t+1 من المعادلتين 6 و 9 ينتج أن

$$(t+1) = (2x)^{1/2} = (3y/2)^{1/3}$$

لنجد أن معادلة المسار

$$y = \frac{4}{3}\sqrt{2x^3} \quad , \quad 9y^2 = 32x^3 \quad 10$$

موضع الجسيم

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(t+1)^2\,\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}(t+1)^3\,\boldsymbol{j}$$

وفي اللحظة t = 2 ثانية

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(3)^2\,\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}(3)^3\,\boldsymbol{j}$$

$$\mathbf{r} = 4.5\,\boldsymbol{i} + 18\,\boldsymbol{j} \quad [m] \quad 11$$

سرعة الجسيم في اللحظة t = 2 ثانية

$$v = (3)\,i + 2(3)^2\,j \ [m/s] = 3\,i + 18\,j \ [m/s]$$

$$|\boldsymbol{v}| = v = \sqrt{9+18^2} = 18.25 \ [m/s] \quad 12$$

بينما متَّجِه تسارع الجسيم يساوي مشتقة السرجهة

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 1\,\boldsymbol{i} + 4(t+1)\,\boldsymbol{j}$$

$$\mathbf{a} = 1\,\boldsymbol{i} + 12\,\boldsymbol{j} \ [m/s]$$

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{1+144} = \sqrt{145}\ [m/s^2] \qquad 13$$

سؤال م 6.2

للسؤال السابق، **سؤال م 5.2**: احسب تسارع الجسيم العمودي والمماسي، وما نصف قطر الانحناء في اللحظة $t = 2[s]$؟

الحـــل

نحسب سرعة الجسيم من المعادلة 1 (في السؤال السابق) بدلالة الزمن

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(t+1)^2 + 4(t+1)^4} = \sqrt{4t^4 + 16t^3 + 25t^2 + 18t + 5}\quad [m] \qquad 1$$

ثُمَّ نحسب التسارع المماسي، معادلة 48.2، ومعادلة 1 (في هذا السؤال)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{16t^3 + 48t^2 + 50t + 18}{2\sqrt{4t^4 + 16t^3 + 25t^2 + 18t + 5}} \qquad 2$$

وفي اللحظة t = 2 ثانية نحسب مقدار التسارع المماسي من المعادلة 2

$$a_t\Big|_{t=2\,[s]} = 12\ [m/s^2]$$

ثُمَّ نحسب مقدار التسارع العمودي في نفس اللحظة

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{145 - 144} = 1\ [m/s^2] \qquad 3$$

وعليه؛ يكون نصف قطر الانحناء، أنظر معادلة 12 في السؤال السابق

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{9 + 324}{1} = 333\ [m] \qquad 4$$

سؤال م 7.2

تتحرك كرةٌ صغيرةٌ داخل مخروطٍ منتظم ومعكوسٍ رأسياً، لتتبع مساراً زنبركياً. فتدور دورةً واحدةً كل T ثانية، وتبعاً لذلك تهبط الكرة المسافة h. أكتب معادلة حركة الكرة في الإحداثيات الاسطوانية والقطبية بدلالة المجاهيل T، R، H وh. وأوجد كذلك سرجهة وتسارع الكرة في الموضع B لحظة إنهائها الدورة الأولى وذلك للقيم R = H = 300 [mm] وh = 100 [mm] عند اللحظة t = 4 [s] = T.

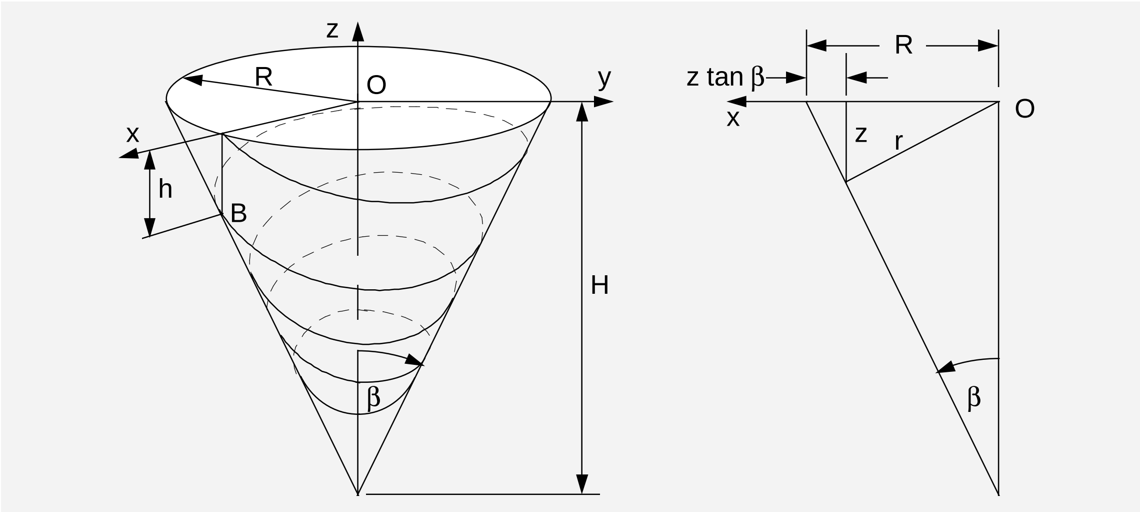
الحـــل

معادلات حركة الكرة داخل المخروط المعكوس بدلالة الإحداثيات الاسطوانية والقطبية، معادلات 3.2

$$r = R - z\tan\beta \quad \Rightarrow \quad r = R - h\,t\tan\beta / T \qquad 1$$

$$\varphi = 2\pi t / T \qquad 2$$

$$z = -h\,t / T \qquad 3$$



شكل م 7.2

وللقيم $T = 4[s]$، $R = H = 300[mm]$ و $h = 100[mm]$ يكون

$$r = 300 - 75\,t\ [mm] \qquad 4$$

$$\varphi = 0.5\pi\ t \qquad 5$$

$$z = -25\,t\ [mm] \qquad 6$$

سرجهة الكرة، معادلة 21.2

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,e_r + r\,\dot{\varphi} e_\varphi + \dot{z}\,\boldsymbol{k} \qquad 7$$

$$\boldsymbol{v} = -75\,\mathbf{e}_r + [\,(300 - 75\,t) \times 0.5\,\pi\,]\,\mathbf{e}_\varphi - 25\,\boldsymbol{k} \qquad 8$$

وعندما تصل الكرة للموضع B يكون قد مرت 4 ثواني

$$\boldsymbol{v} = -75\,\mathbf{e}_r + 0\,\mathbf{e}_\varphi - 25\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v} = -75\,\mathbf{e}_r - 25\,\boldsymbol{k}\ \ [mm/s] \quad \& \quad v = 79\ [mm/s] \qquad 9$$

تسارع الكرة، معادلة 39.2 مضافاً إليها المركبة الرأسية

$$a = [\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2]e_r + [r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}]\,e_\varphi + \ddot{z}\,\boldsymbol{k} \qquad 10$$

$$\mathbf{a} = [\ 0 - 0\ ]\,\mathbf{e}_r - [\ 0 + 2 \times 75 \times 0.5\,\pi\,]\,\mathbf{e}_\varphi + 0$$

$$\mathbf{a} = -\ 235.6\,\mathbf{e}_\varphi\ \ [mm/s^2] \quad \& \quad a = 235.6\ [mm/s^2] \qquad 11$$

4.2 كَيْنَمَاتِيكا الجسم الجاسيء Kinematics of a Rigid Body

دُرِسَت حتى الآن حركة الجسم المفرد دون اعتبارٍ لأبعاده بالنسبة للمسافة التي يقطعها. وقد دُعِي ذلك الجسم جسيماً لأن حركته لا تتأثر بأبعاده والتي يمكن إهمالها. وعلى النقيض من ذلك، نُسَمّي كلّ جسمٍ تكون أبعاده ذات الدرجة نفسها والمسار الذي يرسمه جسماً جاسئاً. ويُعَرف الجسم الجاسيء في الميكانيكا بأنه الجسم الذي لا يتغير شكله الهندسي، وتظل المسافة بين عناصره (نقاطه) ثابتة. وإذا افترضنا أن الجسم الجاسيء مكون من عددٍ لا نهائيّ من الجسيمات، ويتحرك كل جسيم فيه بمسارٍ قد يكون مُشَابِهاً لمسارات الجسيمات الأخرى أو مختلفاً عنها، فإن لكل جسيم من هذه الجسيمات، وفي كل لحظة زمنية الخصائص الكينماتيكية المميزة. وقد تكون بعض هذه الخصائص مشتركة لكل جسيمات الجسم الجاسيء.

يتحدد تَمَوْضُعُ الجسم الجاسيء في الفراغ بالموضع المتوسط الذي تأخذه كل جسيماته المكونة له بالنسبة لإطار الإسناد المحدد. ولأن الجسم الجاسيء مكونٌ من عددٍ هائلٍ من الجسيمات ، يأخذ تحديد الموضع المتوسط لجسيماته وبالتالي المعادلات التفاضلية لحركاتها أبعاداً كبيرة. ويستعاض عن هذه الطريقة بإيجاد موضع الجسيم المعين بالنسبة لجسيم آخر ذي تَمَوْضُعٍ معروف ، إذ تبقى المسافة بين الجسيمين ثابتة.

تقسم حركة الجسم الجاسيء الأساسية إلى الحركة الانتقالية translational motion والحركة الدورانية rotational motion حول محور ثابت، مضافاً إليهما الحركة المستوية plane motion كمجموع الحركتين السابقتين. وهناك الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة، والحركة العامة general motion، وأخيراً الحركة المركبة compound motion. وسندرس هذه الحركات تباعاً بشيء من التفصيل خاصة الحركات الثلاث الأولى والحركة المركبة.

1.4.2 الحركة الانتقالية

هي حركة الجسم الجاسيء التي تُبْقِي أيَّ خطٍ (مستقيم) في الجسم موازياً لنفسه دائماً. ولذلك ترسم جميع جسيمات (نقط) الجسم الجاسيء مسارات متشابهة أثناء الفترة الزمنية نفسها. وقد تكون حركةُ الجسم الجاسيء الانتقالية حركةً في خطٍ مستقيم، كما تكون حركةً في خطٍ منحن.

لنَعْتَبِر أن جسماً جاسئاً يتحرك حركة انتقالية بالنسبة لمحاور الإحداثيات الديكارتية Oxyz **شكل** 18.2. نختار الجسيمين(النقطتين) A و B من جسيمات الجسم الجاسيء بشكلٍ اعتباطي، بحيث يتحدد تَمَوْضُعُ الجسيم A بالنسبة للمركز O بالمتجه $\mathbf{r}_A$ وتَمَوْضُعُ الجسيم B بالنسبة لنفس المركز بالمتجه $\mathbf{r}_B$. وبالتالي يتحدد موضع الجسيم B من المثلث OAB بالعلاقة الاتجاهية

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{BA} \qquad 49.2$$

حيث $\mathbf{r}_{BA}$ مُتَّجِهُ موضع الجسيم B بالنسبة للمركز A. وتُعَرَّفُ سرجهة الجسيم B بالنسبة لمركز الإحداثيات O كمشتقّة متّجه الموضع، معادلة 49.2. فمفاضلة المعادلة المذكورة يعطي السرجهة

$$\boldsymbol{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt}$$

ولأن المُتَّجِهَ $\mathbf{r}_{BA}$ ثابتٌ مقداراً واتجاهاً عند حركة الجسم الجاسيء الانتقالية $\mathbf{r}_{BA} = \text{const.}$، فإن

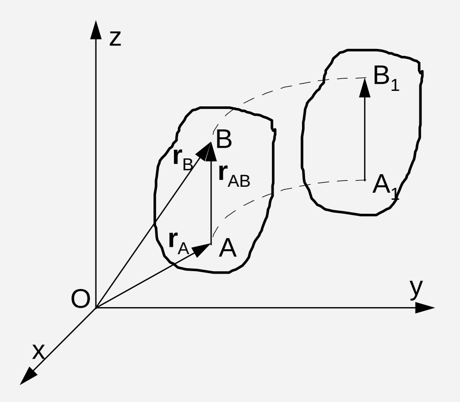
$$\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B \qquad 50.2$$

أي أن سرجهتي الجسيمين A وB من جسيمات الجسم الجاسىء عند حركته الانتقالية متساويتان اتجاهياً في كل لحظة زمنية. كما يُعرَّفُ متّجه تسارع الجسيم بالنسبة لمركز الإحداثيات O كمشتقّة السرجهة أو كمشتقّة ثانية لمتّجه الموضع. إذ إن مفاضلة المعادلة 50.2 زمنياً يعطينا التسارع

$$\mathbf{a}_B = \frac{d^2\mathbf{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_A}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{v}_B}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt}$$

أو

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B \qquad 51.2$$



شكل 18.2

ليعني أيضاً أن (متَّجِهي) تسارعي الجسيمين A و B متساويان مقداراً واتجاهاً عند حركة الجسم الانتقالية. وحيث إن الجسيمين A و B جسيمان اعتباطيان من جسيمات الجسم الجاسىء، فإننا نستطيع القول إن حركته الانتقالية تجعل جميع جسيماته تتحرك بنفس السرجهة وبنفس متجه التسارع وترسم في الوقت نفسه مساراتٍ متشابهة.

2.4.2 الحركة الدورانية حول محور ثابت

الحركة الدورانية للجسم الجاسئ هي الحركة التي تجعل نقطتان من نقطه على الأقل ثابتتين طوال الوقت. ويسمى الخط الواصل بين النقطتين الثابتتين بمحور الدوران، حيث يتحدد كخطٍ ثابت داخل الجسم الجاسىء. وأثناء الحركة الدورانية ترسم كل جسيمات الجسم الجاسىء مسارات متشابهة تشكل دوائر كبيرة وصغيرة، تعتمد أولاً وأخيراً على تَمَوْضُعِ الجسيم المعين بالنسبة لمحور الدوران.

ولتحديد حركة الجسم الجاسىء الدورانية نتخيله كما في **شكل** 19.2، بحيث ينطبق المحور الإحداثي Oz على محور الدوران. إذا حدّدنا موضع جسيم من جسيماته في اللحظة t_o في النقطة P_o الواقعة على المستوى I، وبعد مرور الفترة الزمنية Δt انتقل هذا الجسيم إلى النقطة P الواقعة على المستوى II، فإنّ تَمَوْضُعَ الجسم الجاسئ يتحدد تحديداً وحيد القيمة بالإزاحة الزاوية angular displacement، $\Delta\varphi$ لدوران الجسم الجاسئ بين المستويين I و II. أي أن معرفةَ تَمَوْضُعَ الجسم الجاسىء في أية لحظة زمنية يستلزم معرفةَ العلاقة التي تربط زاويته الدورانية φ بالزمن

$$\varphi = \varphi(t) \qquad 52.2$$

وتدعى المعادلة 52.2 بمعادلة الحركة الدورانية للجسم الجاسىء. وتقاس الزاوية φ بوَحَدَاتِ الدائرية [radian]. ومن الطبيعي أن تكون تلك المعادلة دالّةً متصلةً، ويمكن مفاضلتها على الأقل مرتين بدلالة الزمن. لذلك تتحدد حركة الجسم الجاسىء الدروانية حول محورٍ ثابتٍ ببارامترٍ مستقلٍ واحد هو زاوية الدوران φ. وإذا ما أزيح الجسم الجاسئ خلال الفترة الزمنية Δt حول المحور الثابت Oz بالزاوية $\Delta\varphi$ فإن سرعته الزاوية المتوسطة خلال تلك الفترة تخضع للمعادلة الرياضية

$$, = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad 53.2$$

أما سرعة الجسم الجاسئ الزاوية في الل

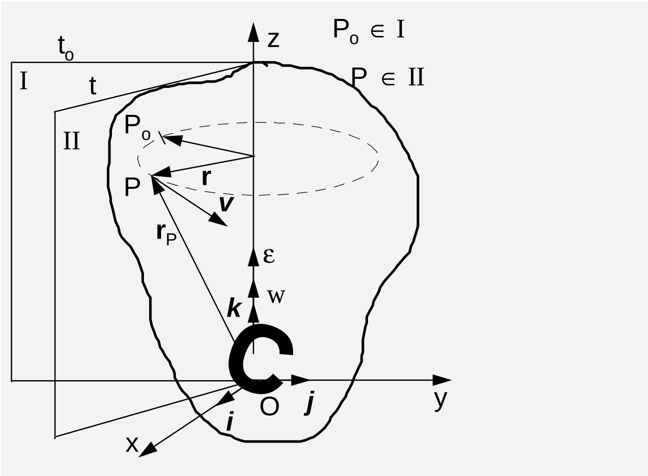
فتساوي نهاية مقدار الســرعة الزاوِّية المتوسـ

معادلة 53.2، إذا ما وجدت هذه النهاية، عندما تؤو

لزمنية Δt إلى الصفر، أو رياضياً مُشْتَقَّةُ الزاوية φ

$$\omega_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} \qquad 54.2$$



شكل 19.2

أي أن السرعة الزاوية للجسم الجاسئ في اللحظة تساوي المشتقة الأولى لزاوية الدوران في تلك اللحظة. والبعد الفيزيائي للسرعة الزاوية هو الدائرية لكل ثانية [rad/s] أو $[\omega] = [1/s]$.

ويمكن تمثيل السرعة الزاوية كمتجه w، مقداره مشتقة زاوية الدوران وخط عمله محور الدوران، بينما يتحدد اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمنى. فيشير الإبهام لاتجاه w بينما تشير الأصابع الأربع المتبقية إلى دوران الجسم.

ويمكن لمتَّجِه السرعة الزاوية w، أن يتغير بدلالة الزمن وذلك عند الحركة الدورانية غير المنتظمة. ويعتبر متجه التســارع الزاوي angular acceleration، رمزه e، الكمية الفيزيائية التي تحدد مقدار واتجاه التغير في سرعة الدوران الزاوية خلال الزمن. ولحسابه نتخيل الجسم الجاسئ، **شكل** 19.2، بحيث تتغير سرعته الزاوية بالمقدار $\Delta\omega$، $\Delta\omega = \omega - \omega_o$ خلال الفترة الزمنية Δt، $\Delta t = t - t_o$. التسارع الزاوي المتوسط للجسم خلال الفترة Δt يساوي خارج القسمة

$$\varepsilon_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_o}{t - t_o} \qquad 55.2$$

أما تسارع الجسم الجاسئ الزاوي في اللحظة t_o فيساوي نهاية مقدار التسارع الزاوي المتوسط، معادلة 55.2، إذا ما وجدت هذه النهاية، عندما تؤول الفترة الزمنية Δt إلى الصفر، أو رياضياً مشتقةُ السرعة الزاوية

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \qquad 56.2$$

وبشكلٍ عام يساوي التسارع الزاوي في اللحظة المعينة المشتقة الثانية لزاوية الدوران، والذي يساوي أيضاً المشتقة الأولى للسرعة الزاوية في تلك اللحظة $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$. والبعد الفيزيائي للتسارع الزاوي هو الدائرية على مربع الزمن $[rad/s^2]$ ، $[\varepsilon] = [1/s^2]$.

وأخيراً، يمكن تمثيل التسارع الزاوي كمتجه e يساوي مقداره المشتقة الثانية لزاوية الدوران، أو المشتقة الأولى للسرعة الزاوية وخط عمله محور الدوران. ويكون اتجاهُهُ موازياً لاتجاهِ w في حالة الدوران التسارعي، وموازياً عكسياً لاتجاه w في حالة الدوران المتباطئ.

الدوران المنتظم والدوران المنتظم التغير للجسم الجاسئ

1- **الدوران المنتظم** uniform rotation: يدعى دوران الجسم بالمنتظم إذا كانت سرعته الزاوية ثابتة في المقدار والاتجاه طوال زمن الحركة، .w=const. ورياضياً بضرب طرفي المعادلة 54.2 في dt ينتج أن

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const. \Rightarrow \quad d\varphi = \omega \ dt$$

وبإجراء التكامل المحدود بين اللحظتين t_o=0[s] و t نجد زاوية الدوران

$$\varphi = \varphi_o + \omega t \qquad 1.57.2$$

حيث φ_o زاوية الدوران الابتدائية في اللحظة t_o. أما السرعة الزاوية فنجدها من حل المعادلة 1.57.2

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_o}{t} \qquad 2.57.2$$

وإذا ما حُدِّدَت الحركة الدورانية ب n دورة في الدقيقة [rpm] [6]، فإن الإزاحة الزاوية تكتب رياضياً

$$\Delta\varphi = 2\pi n$$

بينما تتحدد قيمة السرعة الزاوية بالمعادلة

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{n\pi}{30} \qquad 58.2$$

2- **الدوران منتظم التغير** uniformly accelerated rotation: يدعى دوران الجسم منتظمَ التغير إذا كان تسارعه الزاويّ ثابتاً في المقدار والاتجاه .e=const. ورياضياً فإن

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = const. \Rightarrow d\omega = \varepsilon \, dt$$

وبإجراء التكامل المحدود بين اللحظتين t_o=0 و t يكون

$$\omega = \omega_o + \varepsilon t \qquad 1.59.2$$

حيث إن ω_o السرعة الزاوية الابتدائية في اللحظة t_o. حلُّ هذه المعادلة بدلالة التسارع الزاوي يُعطي

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_o}{t} \qquad 2.59.2$$

بينما يبين حل نفس المعادلة بعد ربطها مع العلاقة 54.2، وإجراء التكامل على الناتج بين اللحظتين t_o=0 و t أن زاوية الدوران

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o t + \varepsilon \frac{t^2}{2} \qquad 60.2$$

والمشابهة لمعادلة إزاحة الجسيم عند حركته بتسارع منتظم على خط مستقيم.

---

[6] [rpm] رموزٌ مختصرةٌ من revolutions per minute دورة في الدقيقة .

1.2.4.2 السَّرْجَهَة ومتَّجِه التَّسَارُع

يمكن حساب سرجهة جسيم ما من جسيمات الجسم الجاسىء عند حركته الدورانية حول محور دوران ثابت بحاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين، السرجهة الزاوية w والموضع **r**، **شكل 19.2**

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{w} \times \mathbf{r} \qquad 61.2$$

وبالتالي فسرعة الجسيم المذكور تساوي عددياً حاصل ضرب السرعة الزاوية للجسم الجاسىء وبعده عن محور الدوران

$$v = \omega\, r \qquad 1.61.2$$

خط عمل السـرجهة هو المماس على امتداد مسـار الجسيم الدائري. ولأن السرعة الزاوية للدوران هي واحدة لكل جسيمات الجسم الجاسىء، ينتج للتو من المعادلتين 61.2 أن سرعة الجسيم (النقطة) المعين تتناسب وبعده عن محور الدوران فقط

$$v \;\alpha\; r$$

حيث α إشارة التناسب. ويتحدد متجه التسارع كمشتقة السرجهة، أنظر المعادلة 40.I

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(\mathrm{w} \times \mathbf{r})}{dt} = \frac{d\mathrm{w}}{dt} \times \mathbf{r} + \mathrm{w} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \mathrm{e} \times \mathbf{r} + \mathrm{w} \times \boldsymbol{v} \qquad 62.2$$

أو كالمركبتين: المماسية، أو التسارع المماسي

$$\mathbf{a}_t = \mathrm{e} \times \mathbf{r} \qquad 1.63.2$$

والعمودية، أو التسارع العمودي

$$\mathbf{a}_n = \mathrm{w} \times \boldsymbol{v} \qquad 2.63.2$$

ومن الطبيعي أن يكون خطُ عملِ التسارع المماسي، طبقاً للمعادلة 2.63.1، المماسَ على امتداد مسار الجسيم، وحسب قاعدة اليد اليمنى يكون اتِّجَاهُهُ موازياً للسرجهة عند الحركة المتسارعة، وموازياً عكسياً للسرجهة عند الحركة المتباطئة. ويتحدد مقدارُه بحاصل ضرب بعده عن محور الدوران وتسارعه الزاوي

$$a_t = |\mathbf{a}_t| = r\,\varepsilon \qquad 1.64.2$$

وعلى الصعيد نفسه، يكون خط عمل واتجاه التسارع العمودي، معادلة 2.63.2، وطبقاً لقاعدة اليد اليمنى هو الخط النصقطري الواصل بين موضع الجسيم والمركز الثابت وباتجاه هذا الأخير دائماً. ويتحدد مقدارُه بحاصل ضرب بعده عن محور الدوران ومربع سرعته الزاوية

$$a_n = |\mathbf{a}_n| = \omega\, v = r\,\omega^2 \qquad 2.64.2$$

أسـئـلـةٌ مـحـلـولـة

سؤال م 8.2

كان عمودٌ اسطواني يدور بسرعةٍ منتظمةٍ قدرها $n = 3000$ دورةٍ في الدقيقة عندما توقف محركه. احسب عدد دوراته حتى التوقف الكامل عن الدوران بعد دقيقتين بتباطؤ منتظم.

الحـــل

يتحدد مقدار زاوية الدوران للحركة التباطئية بالمعادلة 60.2

$$\Delta\varphi = \omega_o t - \varepsilon \frac{t^2}{2} \qquad 1$$

حيث إن السرعة الزاوية، معادلة 58.2

$$\omega_o = \frac{n\pi}{30} = \frac{3600\pi}{30} = 120\pi \ [1/s] \quad \& \quad \omega = 0 \qquad 2$$

كما يتحدد التسارع الزاوي (التباطؤ) من المعادلة 2.59.2

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{0 - 120\pi}{120} = -\pi [1/s^2]$$

$$\varepsilon = \pi [1/s^2] \qquad 3$$

وباستبدال قيم السرعة الزاوية 2 والتسارع الزاوي 3 ، فإن المعادلة 1 تصبح

$$\Delta\varphi = 120\pi \times 120 - \pi \frac{120^2}{2}$$

$$\Delta\varphi = \frac{120^2 \pi}{2} [rad] \qquad 4$$

أو كعدد الدورات في الدقيقة

$$N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{120^2 \pi}{2 \times 2\pi} = 3600 [rev.] \qquad 5$$

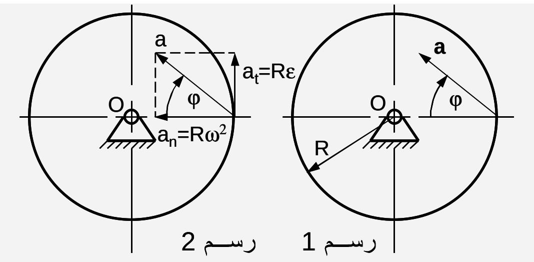
سؤال م 9.2

عند دوران ترسٍ مسنن حول محورٍ دورانٍ ثابت تتغير الزاوية φ المحددة لمتجه التسارع **a** بالقانون

$$\varphi = 0.25\pi t \ [rad.]$$

حيث يقاس الزمن t بالثواني. أوجد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي كدالتين زمنيتين للشروط الإبتدائية التالية

$$t_o = 0 \Rightarrow \omega = \omega_o$$



شكل م 9.2

الحـــل

من رسم 2

$$\tan\varphi = \tan\frac{\pi}{4} t = \frac{a_t}{a_n} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4} t = \frac{a_t}{a_n} = \frac{R\varepsilon}{R\omega^2} \qquad 1$$

وحيث إن $\varepsilon = d\omega/dt$ فإن المعادلة 1 تؤول للشكل التالي

$$\left[\tan\frac{\pi}{4}t\right]dt=\frac{d\omega}{\omega^2} \tag{2}$$

وبإجراء التكامل يكون

$$\int\left[\tan\frac{\pi}{4}t\right]dt=\int\frac{d\omega}{\omega^2}+C \quad\Rightarrow\quad -\frac{\pi}{4}\ln\cos\frac{\pi}{4}t=-\frac{1}{\omega}+C \tag{3}$$

وباستبدال الشروط الابتدائية $\omega=\omega_o$ ⇐ $t_o=0$ ، في المعادلة الأخيرة فإن $C=-\frac{1}{\omega_o}$ وتؤول المعادلة نفسها 3 بعد حلها بدلالة السرعة الزاوية

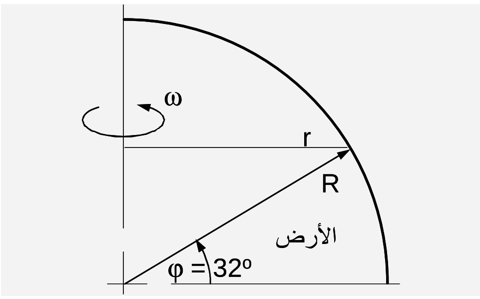
$$\omega=\frac{\pi\,\omega_o}{4\,\omega_o\ln[\cos\frac{\pi}{4}t]+\pi} \tag{4}$$

التسارع الزاوي ينتج من مفاضلة السرعة الزاوية

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{\pi^2\,\omega_o^2\tan\frac{\pi}{4}t}{4\left[4\,\omega_o\ln[\cos\frac{\pi}{4}t]+\pi\right]^2} \tag{5}$$

سؤال م 10.2

ما سرعة (الجسيم الملامس لـــ) سطح الأرض، عند الموقع المحدد بزاوية خط العرض $\varphi = 32^o$ ؟ نصف قطر الأرض $R = 6370$ كيلومتر.



شكل م 10.2

الحـــــــل

سرعة الجسيم الملامس لسطح الأرض

$$v=\ r\,\omega\ =R\cos\varphi\ \omega$$

$$v\ =\ 6370000\times\cos 32^o\times\frac{2\pi}{24\times3600}\ =392\ [m/s]$$

وتدعى هذه الحركة التي يكتسبها الجسيم من دوران الأرض حول محورها، وليست من ذات الجسيم بالحركة المكتسبة، انظر **الباب السابع**.

سؤال م 11.2

يتبع التسارع الزاوي لقضيبٍ يدور في مستوى أفقي العلاقة التالية

$$\varepsilon = 12\,t - 8\ [rad/s^2]$$

احسب الزاوية الكلية التي يصنعها القضيب خلال حركته ما بين اللحظتين $t_o=1[s]$ و $t_1=4[s]$ وذلك للشروط الابتدائية التالية

$$t = 0,\ \omega = -8\ [rad/s]\ ,\ \varphi = 2\ [rad]$$

الحـــــــل

من معادلة التسارع الزاوي 56.2 نحسب السرعة الزاوية كالتكامل

$$\omega\ =\ \int\varepsilon\,dt+C_1\quad\Rightarrow\quad\omega\ =\ \int(12\,t-8)\,dt\ +C_1$$

$$\omega = 6t^2 - 8t + C_1 \qquad 1$$

وبتعويض الشروط الابتدائية في المعادلة 1 نجد الثابت

$$C_1 = -8\ [rad/s] \quad \Rightarrow \quad \omega = 6t^2 - 8t - 8 \qquad 2$$

ومن المعادلة 54.2 نحسب الإزاحة الزّاويّة كتكامل السرعة الزاوية

$$\varphi = \int \omega\, dt + C_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 2t^3 - 4t^2 - 8t + C_2 \qquad 3$$

وبتعويض الشروط الابتدائية في المعادلة 3 نجد أن $C_2 = 2\,[rad]$ وبالتالي نكتب

$$\varphi = 2t^3 - 4t^2 - 8t + 2 \qquad 4$$

ولحساب الزاوية الكلية التي يصنعها القضيب خلال الفترة الزمنية من اللحظة $t_o=1[s]$ حتى اللحظة $t_1=4[s]$ ، نحدد أولاً فيما إذا كانت السرعة الزاوية ω تغير اتجاهها

$$\omega = 6t^2 - 8t - 8 = 0 \Rightarrow$$
$$(3t + 2)(2t - 4) = 0 \Rightarrow t_1 = -2/3\ [s]\ ,\ t_2 = 2\ [s]$$

وتبعاً لذلك ؛ نجد أن ω تغير اتجاهها عند الزمن $t = 2[s]$ ، $t = 2(>0) \in (1,4)$. فللزمن $1 \le t < 2$ تكون $\omega < 0$ بينما للزمن $2 < t \le 4$ تكون $\omega > 0$. وتُحسب الزاوية التي يصنعها القضيب خلال تلك الفترة الزمنية من العلاقة 4 كمجموعي فرقين

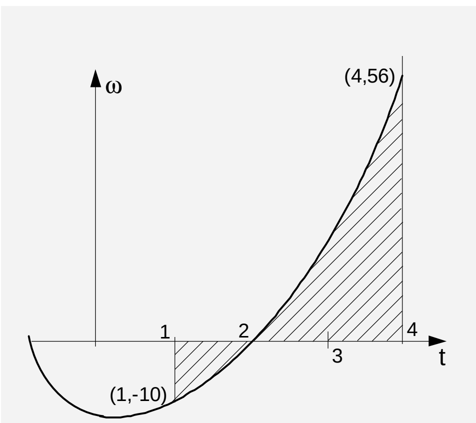
$$\Delta\varphi = |\varphi_4 - \varphi_2| + |\varphi_2 - \varphi_1|$$
$$= |(2 \times 4^3 - 4\times4^2 - 8\times4 + 2) - (2 \times 2^3 - 4\times2^2 - 8\times2 + 2)|$$
$$+ |(2 \times 2^3 - 4\times2^2 - 8\times2 + 2) - (2 \times 1^3 - 4\times1^2 - 8\times1 + 2)|$$
$$\Delta\varphi = 54\ [rad] \qquad 5$$

تنبيه: يمكن حل هذا السؤال كتكامل دالة السرعة الزاوية بين اللحظتين الزمنيتين 1 و 4

$$\varphi = \int_1^4 \omega\, dt = \int_1^2 \omega\, dt + \int_2^4 \omega\, dt$$

ولأن ω تغير إشارتها من سالبة إلى موجبة عند الزمن $t = 2$ ثانية، عندئذ يجمع التكاملان مطلقاً، أي أن

$$\varphi = \left|\int_1^2 (6t^2 - 8t - 8)dt\right| + \left|\int_2^4 (6t^2 - 8t - 8)dt\right|$$
$$\varphi = \left\{2t^3 - 4t^2 - 8t\right\}\Big|_1^2 + \left\{2t^3 - 4t^2 - 8t\right\}\Big|_2^4$$
$$= |-16 + 10| + |32 + 16|$$
$$\varphi = 54\ [rad]$$

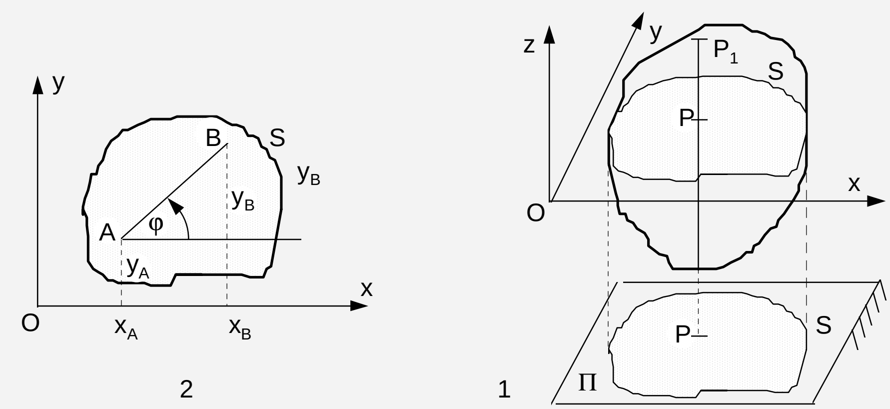


وهذه تساوي المساحة المحصورة بين دالة السرعة الزاوية $\omega = \omega(t)$ ومحور الزمن بين اللحظتين $t = 1$ ثانية و $t = 4$ ثانية.

3.4.2 الحركة المستوية Plane Motion

الحركة المستوية هي الحركة التي تجعل حركة كل جسيمات الجسم الجاسئ وسرجهاتها ومتجهات تسارعاتها موازية لمستوىً ما ثابت. وبالعادة يتحرك الكثير من أجزاء الآلات والأجهزة الميكانيكية حركاتٍ مستوية كالدحراج الذي يتدحرج على طريق مستقيم وذراع التوصيل في العمود المرفقي وغيرهما.

إذا افترضنا أن حركة الجسم الجاسيء، **شكل 1.20.2** مستوية، فإن حركات جميع جسيماته (نقاطه) الواقعة على الخط PP_1 العمودي على المستوى الثابت Π متطابقةً. أي أن سرجهات جميع النقاط الواقعة على الخط PP_1 متوازية ومتجهات تسارعاتها متوازية أيضاً. وبصيغةٍ مكافئة مساراتُ جميع نقاط الجسم الجاسئ وسرجهاتها ومتجهات تسارعاتها موازيةً لمستوىً واحدٍ ووحيد هو المستوى الثابت Π. إذا افترضنا أيضاً أن المستوى الإسنادي الثابت Π موازٍ للمستوى الإحداثي Oxy، فإن مقطعاً رقيقاً (صفيحةً) في الجسم الجاسئ يتقاطع مع المستوى الإحداثي، نستطيع تمثيله فيه بخطٍ منحنٍ مغلق S، **شكل 2.20.2**. ومن الطبيعي أن دراسة حركة المقطع S برمّتِه بالنسبة للمستوى الإحداثي Oxy تكفي للتعبير عن حركة الجسم الجاسيء برمته.



شكل 20.2

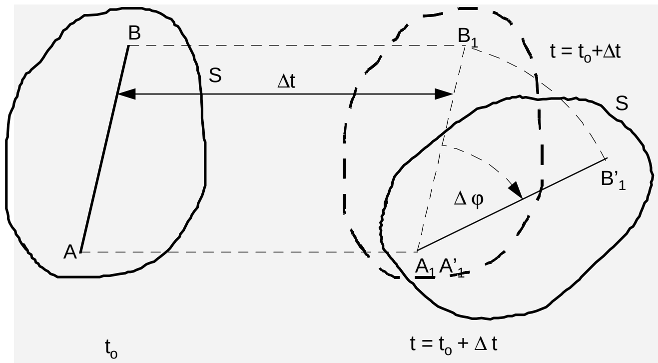
يتحدد موضع المقطع S في المستوى Oxy بتموضع المستقيم الوهمي AB داخله. طول هذا المستقيم محدد l = AB، كما أن إحداثيات أحد طرفيه والزاوية التي يصنعها الخط مع المحور Ox محددة بالعلاقتين $A\ (x,y) = A\ (x_A,y_A)$ و $\varphi = \varphi(t)$. إذا اعتبرنا النقطة A قطباً لجزء الحركة الدوراني حول المحور المار فيها، فإن كلاً من الإحداثيين x_A و y_A والزاوية φ يتغير كدوالٍ زمنية عند حركة الجسم الجاسئ. ورياضياً فإن

$$x_A = x_A(t)\ ,\ y_A = y_A(t)\ ,\ \varphi = \varphi(t) \qquad 65.2$$

حيث تدعى هذه الدوال بمعادلات الحركة المستوية. ولتوضيح أن الحركة المستوية هي محصلة حركتين، انتقالية ودورانية، نتخيل الموضعين I و II واللذين يتخذهما المقطع المتحرك S في اللحظتين المتتاليتين t_o و t، حيث $t = t_o + \Delta t$، **شكل 21.2**. تتمثل حركة الجسم الجاسئ المستوية في إزاحة المقطع S ومعه الجسم برمته من الموضع I إلى الموضع II بالطريقة التالية: نزيح المقطع S إزاحةً انتقالية بحيث ينتقل القطب A على امتداد مساره إلى الموضع A_1، عندئذٍ يتخذ المستقيم AB الموضع A_1B_1، ثُمَّ ندير المقطع S في الموضع الجديد II

حول القطب A_1 بالزاوية $\Delta\varphi$ وليتخذ المستقيم A_1B_1 الوضعَ النهائي $A'_1B'_1$. ويوصَف جزء الحركة الانتقالي للجسم الجاسئ بالمعادلتين الأوليتين من معادلات 65.2 بينما يوصف الجزء الدوراني حول القطب A بالمعادلة الثالثة فقط من نفس المعادلات.

ولذلك، فالمميزات الكينماتيكية الأساسية للحركة المستوية هي سرجهة القطب $\boldsymbol{v}_A$ ومتجه تسارعه $\mathbf{a}_A$ للحركة الانتقالية، وكلٌّ من السرجهة الزاوية w ومتجه التسارع الزاوي e للحركة الدورانية حول القطب A. ويمكن إيجاد قيمة أيٍ من هذه المميزات في أية لحظة زمنية حسب المعادلات 65.2.



شكل 21.2

1.3.4.2 سرجهات جسيمات الجسم الجاسئ

يتحدد متَّجِهُ الموضع المطلق للجسيم (النقطة) B من جسيمات الجسم الجاسىء الممثلة بالمقطع S بالنسبة للقطب الثابت O_1 بالمعادلة الاتجاهية

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{BA} \qquad 49.2$$

حيث r_A متَّجِهُ الموضع المطلق للجسيم A و r_{BA} متَّجِهُ الموضع النسبي الذي يبين تموضع الجسيم الاعتباطي B بالنسبة إلى A، **شكل** 22.2. سرجهة الجسيم B (المطلقة) هي مشتقة متجه موضعه

$$\boldsymbol{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt}$$

حيث إن

$$\frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \boldsymbol{v}_A \qquad 66.2$$

سرجهة الجسيم المطلقة A بالنسبة للقطب الثابت O_1. وبينما طول المتجه $\mathbf{r}_{BA}$ ثابتٌ، فإنه يدور حول القطب A في مسارٍ منحنٍ (القوس المتقطع ، **شكل** 22.2)، نصف قطر انحنائه $AB = r_{BA}$، وبالتالي لا تساوي مشتقته الصفر [7]

$$\frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} = \boldsymbol{v}_{BA} \qquad 67.2$$

وهذه تدعى بسرجهة الجسيم B حول محور دورانٍ يمر في A وعمودي على المقطع S، أو بشكلٍ مختصر **سرجهة** B **حول** A. أي أن

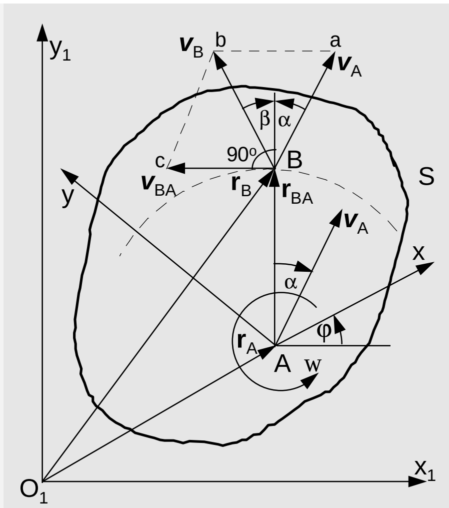
$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_B \qquad 68.2$$

[7] انظر البند I.9: **المتجهات المتغيرة مع الزمن**، ملحق I.

وبشكلٍ عام فإن **سرجهة أية نقطةٍ من نقاط المقطع S تساوي هندسياً سرجهة أية نقطة أخرى مأخوذة كقطبٍ مضافاً إليها سرجهة النقطة نفسها عند دورانها مع المقطع S حول هذا القطب**. وتتحدد سرجهة الجسيم B حول A بالعلاقة الاتجاهية الشبيهة بالمعادلة 61.2، عندما تكون $w = w_{AB}$ و $\mathbf{r} = \mathbf{AB}$، لينتج أن

$$\boldsymbol{v}_{BA} = w \times \mathbf{r}_{AB} = w_{AB} \times \mathbf{AB} \qquad 69.2$$

حيث w_{AB} السرجهة الزاوية لدوران المقطع S (النقطة B) حول القطب A، وبالتالي دوران الجسم الجاسيء برمته، أمَّا **AB** فهو متجه موضع الجسيم B بالنسبة للقطب A، $\mathbf{AB} = \mathbf{r}_{BA}$. وباستبدال $\boldsymbol{v}_{BA}$ من المعادلة 69.2 تؤول المعادلة 68.2 إلى الشكل التالي



شكل 22.2

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + w_{AB} \times \mathbf{r}_{BA} \qquad 70.2$$

وهندسياً تتحدد سرجهة الجسيم (النقطة) B برسم متوازي الأضلاع المناظر، Babc ، **شكل 22.2**.

نظرية المساقط لسرجهتي جسيمين من جسيمات المقطع S

يؤدي عادةً تعيين سرجهات جسيمات الجسم الجاسئ وفقاً للمعادلة 70.2 إلى حسابات معقدة بعض الشيء. فإذا ما عرف مقدار وخط عمل واتجاه السرجهة $\boldsymbol{v}_A$ وخط عمل السرجهة $\boldsymbol{v}_B$ فقط، فإن حساب السرجهة $\boldsymbol{v}_B$ بطريقة متوازي الأضلاع، شكل 22.2، يستلزم معرفة مقدار وخط عمل واتجاه السرجهة $\boldsymbol{v}_{BA}$، بما في ذلك تحديد w_{AB} مقداراً واتجاهاً. غير أنه يمكن الحصول على طريقٍ أسهل وأبسـط عملياً، وذلك انطلاقاً من المعادلة الأســاســية 70.2. فإذا ما أسقطنا المعادلة نفسها على خطٍ بحيث نتخلص من الجزء $\boldsymbol{v}_{BA}$، فإننا نحصل على معادلةٍ طرفاها السرجهتان $\boldsymbol{v}_A$ و $\boldsymbol{v}_B$ فقط، وتؤول المسألة قيد البحث إلى تحديد الخط الذي يجعل مركبة $\boldsymbol{v}_{BA}$ عليه تساوي الصفر. هذا الخط بطبيعته سيكون الخط AB . ولذلك يمكن صياغة النظرية التالية: **مسقطا سرجهتي جسيمين من جسيمات الجسم الجاسيء عند حركته المستوية على الخط المستقيم الواصل بينهما متساويان**.

ولإثبات هذه النظرية نأخذ الجسيمين (النقطتين) A و B، **شكل 22.2**، ونسقط المعادلة 70.2 على الخط AB، ينتج أن

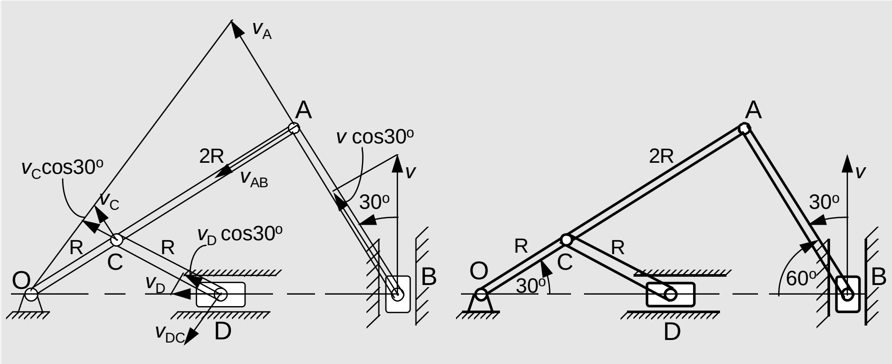
$$\boldsymbol{v}_B \cos\beta = \boldsymbol{v}_A \cos\alpha \qquad 71.2$$

إذ إن $\boldsymbol{v}_{BA}$ تتعامد مع AB، $\boldsymbol{v}_{BA} \perp AB$، وبالتالي فمركبتها على الخط المذكور تساوي الصفر. وكتطبيقٍ مباشر على النظرية الأخيرة نحل السؤال التالي

سؤال م 12.2

استخدم نظرية المساقط لسرجهتي جسيمين من جسيمات الميكانيزم (النظام)، معادلة 71.2 لحساب سرجهتي الطرفين C و D للشكل المرافق إذا علمنا أن سرجهة المنزلق B محددة بالمعادلة الاتجاهية

$$\boldsymbol{v}_B = v\,\boldsymbol{j} \qquad 1$$



شكل م 12.2

الــحـــــل

نبين خطوط عمل السرجهات v_A ، v_B ، v_C و v_D . تتحدد سرجهتا طرفي الذراع AB بالمعادلة الاتجاهية

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{AB} \tag{2}$$

إسقاط هذه المعادلة على الخط BA يعطي المعادلة

$$v_A = v_B \cos 30^o = v \cos 30^o$$

$$\therefore\ v_A = \frac{\sqrt{3}}{2} v \tag{3}$$

ومن التشابه بين المثلثين الناتجين على الذراع OA ينتج أن

$$v_C = \frac{1}{3} v_A = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} v$$

$$\therefore\ v_C = \frac{\sqrt{3}}{6} v \tag{4}$$

أخيراً ، تتحدد سرجهتا طرفي الذراع CD بالمعادلة

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{DC} \tag{5}$$

فنسقطها على الخط DC

$$v_D \cos 30^o = v_C \cos 30^o$$

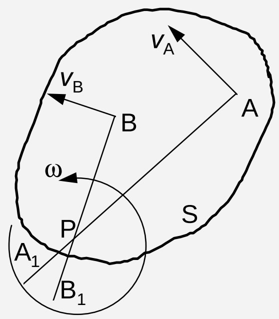
$$\Rightarrow\quad v_D = v_C$$

$$\therefore\ v_D = \frac{\sqrt{3}}{6} v \tag{6}$$

المركز اللحظي للسرعات Instantaneous Center of Rotation

سنثبت أنه في كل لحظةٍ زمنية تتواجد نقطة ما في (أو امتداداته) المقطع S تكون سرعتها صفراً، وذلك باستخدام نظرية المساقط لسرجهتي جسيمين اعتباطيين من جسيمات الجسم الجاسىء. وفي العادة تدعى هذه النقطة بالمركز اللحظي للسرعات. ومن السهل التأكد من أن حركة الجسم حركة مستوية تجعل مثل هذه النقطة تتواجد سواء ضمن المستوى المحصور بالمقطع S أو ضمن امتداداته. وهذه النقطة نقطة مفردة ووحيدة في اللحظة المعينة.

إذا كانت سرجهتا جسيمين من جسيمات الجسم الجاسىء (المقطع S)، معرفةً بالرمزين $\boldsymbol{v}_A$ و $\boldsymbol{v}_B$ على التوالي، **شكل 23.2**، عندئذ تكون النقطة P وهي تقاطع الخطين العموديين AA_1 و BB_1 على السرجهتين $\boldsymbol{v}_A$ و $\boldsymbol{v}_B$ المركزَ اللحظي للسرعات. ولإثبات ذلك نعمد إلى افتراض أن $\boldsymbol{v}_P \neq 0$. هذا يعني أن سرجهة الجسيم A تخضع للمعادلة التالية



شكل 23.2

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{v}_{AP}$$

كما أن سرجهة الجسيم B

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{v}_{BP}$$

وباستخدام نظرية مساقط السرجهتين $\boldsymbol{v}_A$ و $\boldsymbol{v}_P$ ومن ثم $\boldsymbol{v}_B$ و $\boldsymbol{v}_P$ على الخطين AP وBP وعلى الترتيب، ينتج أن $\boldsymbol{v}_P$ ستكون عمودية على الخطين AP و BP وفي الوقت نفسه، وهذا غير ممكن. ويتضح من هذه النظرية أنه لا توجد للمقطع S في اللحظة الزمنية المعينة سوى نقطةٍ واحدة ووحيدة تساوي سرعتها صفراً. وسرعة أي جسيم من جسيمات (نقاط) المقطع S تساوي حاصل ضرب بعد الجسيم عن المركز اللحظي للسرعات والسرعة الزاوية، أو

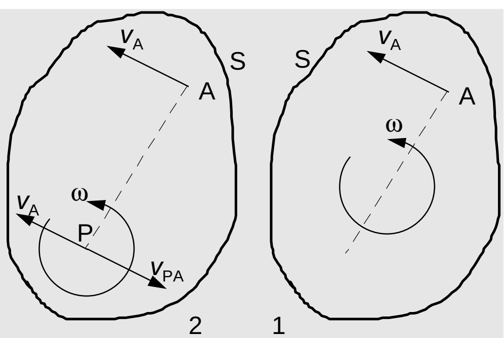
$$\boldsymbol{v}_A = AP\,\omega \quad , \quad \boldsymbol{v}_B = BP\,\omega \qquad 72.2$$

بعض الحالات الخاصة لتعيين المركز اللحظي للسرعات

1- **سرجهة جسيمٍ منفرد من جسيمات الجسم الجاسئ معروفةٌ مقداراً واتجاهاً، كما أن اتجاه السرجهـــة الزاوية w محدد**، **شكل 1.24.2**. عندئذٍ يساوي الطول AP خارج قسمة السرعة والسرعة الزاوية

$$\overline{AP} = \frac{v_A}{\omega} \qquad 1.73.2$$

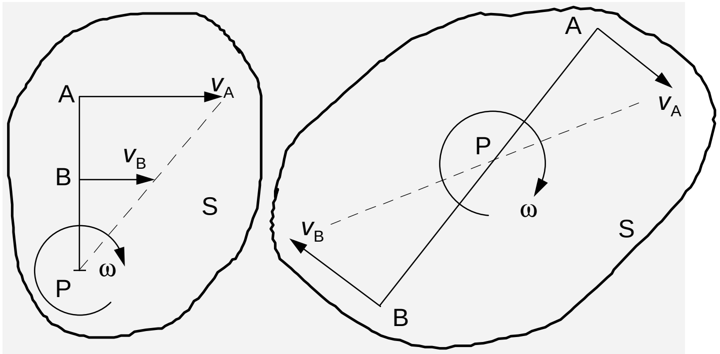
وهذا الطول يُنْقَل على العمود المقام على السرجهة وباتجاه دوران الجسيم، مُحَدِّداً مركز السرعات اللحظيP للمقطع S، **شكل 2.24.2**.



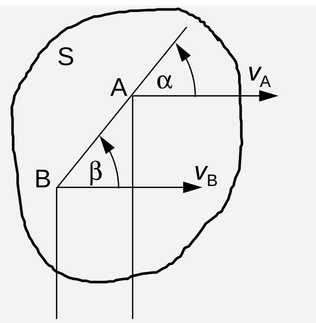
شكل 24.2

2- **سرجهتا جسيمين من جسيمات الجاسئ محددتان مقداراً واتجاهاً، ومتوازيتان $\boldsymbol{v}_A // \boldsymbol{v}_B$. كما أن الخط المستقيم الواصل بين نقطتي تأثير السرجهتين عموديّ على السرجهتين**، **شكل 25.2**. عندئذٍ يتحدد موضع المركز اللحظي للسرعات P للمقطع S بتقاطع الخط الواصل بين نقطتي تأثير السرجهتين والخط الواصل بين رأسي السرجهتين أو امتدادهما.

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \omega_{AB} \qquad 2.73.2$$



شكل 25.2



شكل 26.2

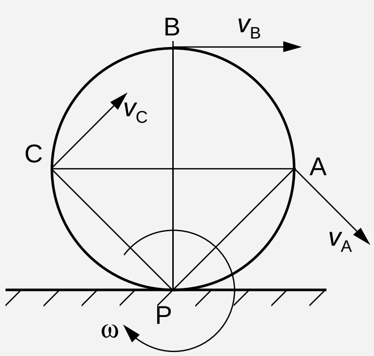
3- **سرجهتا جسيمين من جسيمات الجسم الجاسئ محددتان مقداراً واتجاهاً ، ومتوازيتان $v_A // v_B$. والخط المستقيم الواصل بين نقطتي تأثير السرجهتين ليس عمودياً على السرجهتين، شكل 26.2.** عندئذٍ يتحدد موضع المركز اللحظي للسرعات P للمقطع S في الما لا نهاية. واستناداً إلى نظرية المساقط لسرجهتي جسيمين من جسيمات المقطع S، يكون

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta \;\Rightarrow\; v_A = v_B$$

لأن الزاويتين α و β متساويتان. ولذلك فالسرعة الزاوية للجسم الجاسئ تساوي الصفر

$$\omega = 0 \quad \& \quad \overline{AP_v} = \overline{BP_v} = \infty$$

وتبعاً لذلك، تكون حركة الجسم الجاسئ في تلك اللحظة انتقاليةً.



شكل 27.2

4 - **التدحرج بدون انزلاق للأجسام الاسطوانية**

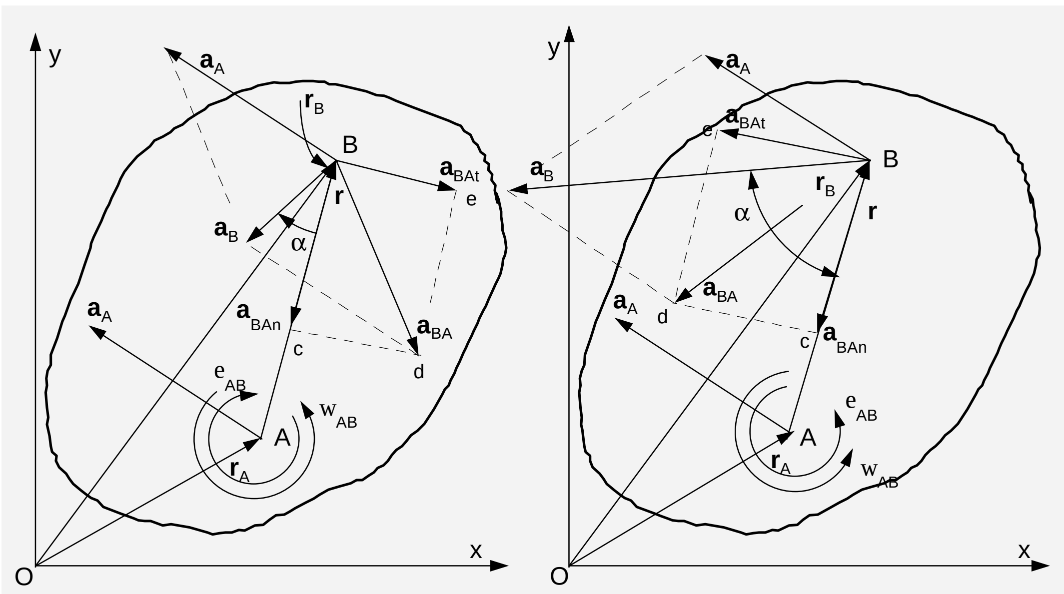
في هذه الحالة تكون سرعتا نقطتي التلامس بين السطح الثابت والجسم الاسطواني متساويتين وذلك لعدم وجود انزلاق بينهما، شكل 27.2. ولأن السطح غير متحرك فسرجهة كلُّ جسيماته كسرجهة نقطة التلامس مع الجسم الاسطواني تساوي الصفر، أي أن $v_P = 0$. لذلك تعتبر نقطة التلامس P بين السطحين الاسطواني والثابت مركزَ السرعات اللحظي للأجسام الاسطوانية.

2.3.4.2 مُتَجِهَاتُ تَسَارُعِ جسيمات الجسم الجاسئ

يتحدد متجه تسارع أي جسيم من جسيمات الجسم الجاسئ كمشتقة ثانية لمتَّجِهِ الموضع أو كمشتقة أولى للسرجهة، شكل 28.2

$$\mathbf{a}_B = \frac{d^2\mathbf{r}_B}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{v}_B}{dt}$$

وباستبدال $\boldsymbol{v}_B$ بقيمتها من المعادلة 68.2 ينتج أن



شكل 28.2

$$\mathbf{a}_B = \frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}_{BA}}{dt} \;\Rightarrow\; \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} \qquad 74.2$$

ولذلك، يمكن صياغة النظرية التالية: **متَّجِه تسارع أي نقطةٍ من نقاط المقطع** S **يكافئ هندسياً متَّجِهَ تسارع القطب** A **مضافاً إليه متَّجِهَ تسارع النقطة نفسها أثناء دورانها مع المقطع** S **حول محور الدوران المار في القطب** A. وإذا افترضنا أن حركة الجسيم B حول القطب A منحنيةٌ، تأخذ المعادلة 74.2 الصيغة التالية

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA\,n} + \mathbf{a}_{BA\,t} \qquad 1.74.2$$

حيث $\mathbf{a}_{BAn}$ متَّجِه تسارع الجسيم B بالنسبة إلى القطب A العمودي والذي مقداره

$$a_{BA\,n} = \left|\mathbf{a}_{BA\,n}\right| = AB\,\omega_{AB}^2 \qquad 1.75.2$$

بينما $\mathbf{a}_{BAt}$ متَّجِه تسارع الجسيم B بالنسبة إلى القطب A المماسي والذي مقداره

$$a_{BA\,t} = \left|\mathbf{a}_{BA\,t}\right| = AB\,\varepsilon \qquad 2.75.2$$

خط عمل التسارع المماسي a_{BAt} هو المماس على (منحنى)حركة B حول A، وهو يوازي السرجهة إذا كان الدوران تسارعياً، $0 < \varepsilon$، ويوازي السرجهة عكسياً، إذا كان الدوران تباطئياً $0 > \varepsilon$. وإذا كانت حركة القطب A دورانية، فإن متَّجِه تسارعه يُعَرَّف بالمركبتين العمودية a_{An} والمماسية a_{At}، فتؤول المعادلة 1.74.2 إلى الشكل التالي

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{An} + \mathbf{a}_{At} + \mathbf{a}_{BA\,n} + \mathbf{a}_{BA\,t} \qquad 76.2$$

ويبين **الشكل 28.2**، أن تعيين تسارع الجسيم B مقداراً واتجاهاً بطريقة المضلَّعات الاتجاهية عملية معقدة. إذ يستلزم ذلك إيجاد تسارع الجسيم B بالنسبة إلى A من متوازي الأضلاع Bcde، بما يعني إضافة مجهولٍ آخر - الزاوية α. لذلك يستعاض عن هذه الطريقة بإسقاط المعادلة 1.74.2 (أو 76.2) على الخط AB

(أو امتداده) أولاً، ثم إسقاطها على خطٍ يعامد الخط نفسه. وتكفل هذه العملية إسقاط (تنحية) أحد المجاهيل سواءً التسارع العمودي a_{BAn}، أو المماسي a_{BAt} من معادلتين قياسيتين وليدتي هذا الإسقاط.

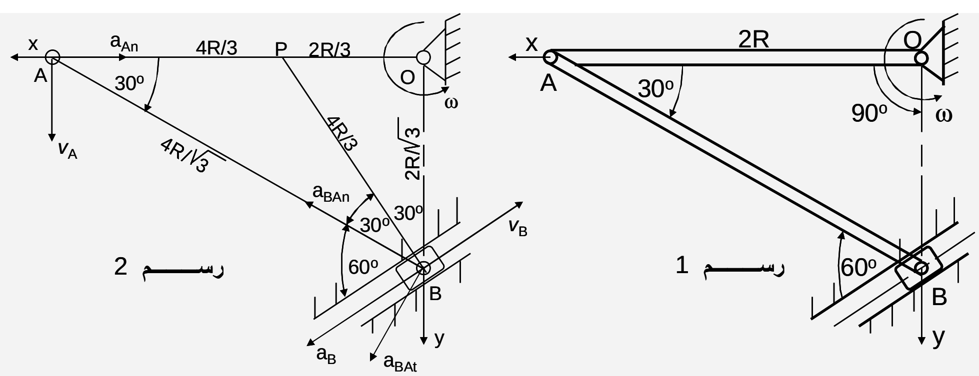
حــل المسائل

يقوم حل مسائل الحركة المستوية على تحديد معادلات الحركة الأساسية ،معادلات 65.2، سرجهة الجسيم، معادلة 70.2 والتسارع، معادلة 76.2. وفي هذا الصدد، يمكن تطبيق نظرية المساقط لسرجهتي جسيمين من جسيمات الجسم الجاسئ، معادلة 71.2، أو استخدام المركز اللحظي للسرعات لتحديد سرجهة عنصر من عناصر الجسم الجاسئ. وفي الميكانيزمات المختلفة، ذوات الأذرع المتعددة ، يتم حساب السرجهة، التسارع، السرجهة الزاوية والتسارع الزاوي لذراعٍ معين تدريجياً وذلك انطلاقاً من الذراع المعروفة معطياته الكينماتيكية. يجب الانتباه إلى أن إيجاد قيمة محددة للسرعة الزاوية للذراع المعين في لحظةٍ ما، لا تعني بالضرورة أن التسارع الزاوي للذراع نفسه صفراً. إذ يتم حساب الأخير كحاصل قسمة التسارع المماسي لطرف الذراع على طول الذراع.

أسـئـلـةٌ مـحـلـولـة

سؤال م 13.2

يدور المرفق OA بسرعةٍ زاويةٍ ثابتة $\omega = const.$ ما سرعة وتسارع المنزلق B والتسارع الزاويّ للذراع AB.



شكل م 13.2

الــحــل

يبين رسم 2 المركز اللحظي للسرعات P، $P \in OA$

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \omega_{AB} \qquad 1$$

$$AP = BP = \frac{4R}{3} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{2R\omega}{\frac{4R}{3}} = \frac{3}{2}\omega \qquad 2$$

$$v_B = v_A = 2\,R\,\omega \qquad 3$$

تسارع المنزلق B

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_{An} + \mathbf{a}_{BAn} + \mathbf{a}_{BAt} \qquad 4$$

حيث إن

$a_{An} = 2R\,\omega^2$ 5

$a_{BAn} = AB\ \omega_{AB}^2 = \frac{4R}{\sqrt{3}} \times \left\{\frac{3}{2}\omega\right\}^2 \Rightarrow a_{BAn} = 3\sqrt{3}\,R\omega^2$ 6

وبإسقاط المعادلة 4 على الخط AB، نحصل على معادلة تشمل مجهولاً واحداً هو a_B

$eq\ 4 : AB \Rightarrow -\ a_B \cos 60 = a_{An} \cos 30 - a_{BAn}$

$-\ a_B \times \frac{1}{2} = 2R\omega^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3}\,R\omega^2 \Rightarrow a_B = 4\sqrt{3}\,R\omega^2$ 7

كما أن إسقاط المعادلة 4 على العمود المقام على الخط AB ، يعطي معادلة أخرى بالمجهول a_{BAt}

$eq.\ 4 : \perp AB \Rightarrow -\ a_B \cos 30 = -\ a_{An} \cos 60 + a_{BAt}$ 8

$4\sqrt{3}\,R\omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\ 2R\,\omega^2 \frac{1}{2} + a_{BAt}$

$a_{BAt} = 7R\,\omega^2 \Rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{a_{BAt}}{AB} = \frac{7R\omega^2}{\frac{4R}{\sqrt{3}}} = \frac{7\sqrt{3}\,\omega^2}{4}$

$e_{AB} = -\ \frac{7\sqrt{3}\,\omega^2}{4}\boldsymbol{k}$ 9

سؤال م 14.2

يدور المرفق OA بسرعةٍ زاويةٍ ثابتةٍ، ω_1=const. حول محورٍ أفقي ثابت يمر في O، ساحباً معه الترس II الذي يدور داخل الترس الآخر الثابت I.

1- اكتب معادلة حركة نقطة على سطح الترس الخارجي التي تنطلق من الموقع P_o وذلك للشروط الابتدائية التالية $t=t_0=0$ و $\varphi_o=0$.

2- احسب سرعة النقاط A، B و C. (النقطة B نقطة التعشيق على الترس II)

3- وما تسارع النقاط A ، B و C؟

الحـــــل

حال صعود الترس II داخل الترس I وللأعلى يكون القوسان BP_o على الترس I و BP (بالخط المتقطع) لا متساويين. أي أن

$arc\ BP_o = arc\ BP \Rightarrow (R + r)\,\varphi = r\,\psi \Rightarrow \psi = (R + r)\,\varphi / r$ 1

وحيث

$\varphi_1 = \psi - \varphi \Rightarrow \varphi_1 = R\,\varphi / r$ 2

إحداثيات النقطة P

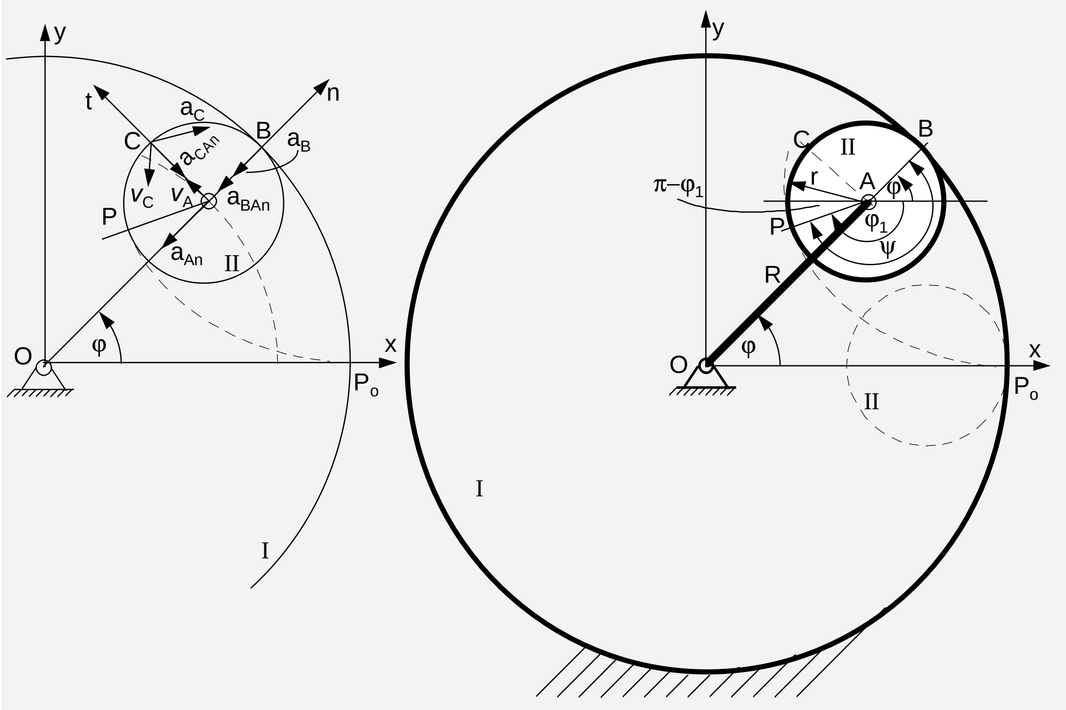
$x_P = R\cos\varphi - r\cos(\pi - \varphi_1)$
$y_P = R\sin\varphi - r\sin(\pi - \varphi_1)$

وباستبدال φ_1 من المعادلة 2 ينتج معادلتا مسار النقطة P على محيط الترس II

$x_P = R\cos\varphi + r\cos\frac{R}{r}\varphi$ 3

$y_P = R\sin\varphi - r\sin\frac{R}{r}\varphi$ 4

وهي تمثل معادلاتٍ دُوَيْرِيّة epicycloidal بارامترية.



شكل م 14.2

2 - **السرعة**: سرعة الرأس A

$$v_A = R\,\omega_1 \qquad 5$$

وهي تساوي سرعة الرأس نفسه بالنسبة للمركز اللحظي للسرعات للترس II ، النقطة B

$$v_B = 0 \quad \Rightarrow v_A = R\,\omega_1 = r\,\omega_2 \qquad 6$$

ومنها السرعة الزاوية للترس II

$$\omega_2 = \frac{R}{r}\,\omega_1 \qquad 7$$

سرعة النقطة C

$$v_C = \overline{CB}\;\omega_2 = \sqrt{2}\;r\,\frac{R}{r}\,\omega_1 \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{2}\;R\,\omega_1 \qquad 8$$

3 - **التسارع**

من معادلة 7 تكون السرعة الزاوية للترس II ثابتةً، أي أن التسارع الزاوي للترس II يُساوي الصفر

$$\omega_2 = \frac{R}{r}\,\omega_1 = \text{const} \;\Rightarrow\; \varepsilon_{II} = 0 \qquad 9$$

تسارع الرأس A

$$a_A = a_{An} = R\,\omega_1^2$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{An} = -\,R\,\omega_1^2\;\mathbf{e}_n \qquad 10$$

تسارع النقطة C

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CA} = \mathbf{a}_{An} + \mathbf{a}_{CAn}$$

$$\mathbf{a}_{CAn} = -r\omega_2^2\ \mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{a}_C = -R\omega_1^2\ \mathbf{e}_n - r\ \omega_2^2\ \mathbf{e}_t = -R\omega_1^2\ \mathbf{e}_n - \frac{R^2}{r}\omega_1^2\ \mathbf{e}_t \qquad 11$$

وتبعاً لذلك، يبلغ مقدار تسارع النقطة C

$$a_C = \frac{R}{r}\omega_1^2\sqrt{R^2 + r^2} \qquad 12$$

تسارع النقطة B

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_{An} + \mathbf{a}_{BA\,n}$$

$$\mathbf{a}_B = -R\omega_1^2\ \mathbf{e}_n - r\ \omega_2^2\ \mathbf{e}_n$$

$$a_B = \frac{R}{r}\ \omega_1^2\ [\,r + R\,]\ ,\ \mathbf{a}_B = -\frac{R}{r}\ \omega_1^2\ [\,r + R\,]\ \mathbf{e}_n \qquad 13$$

سؤال م 15.2

تدور العجلة D بسرعة دورانٍ ثابتةٍ حول محور عمودي على مستوى الرسم، $\omega = \omega\boldsymbol{k}$. وتدفع في الوقت نفسه المنزلقين B و C والذراعين AB وBC المتصلة مع بعض بواسطة ثلاثة مفاصل A ، B و C. أوجد تسارع المنزلق B والمنزلق C والتسارع الزاوي للذراعين AB وBC .

الـــحــــل

بينما تدور العجلة D حول المحور الثابت Oz يُتِمُّ الذراعان AB و BC حركةً مستوية . سرعة النقطة A على محيط العجلة

$$v_A = R\,\omega \qquad 1$$

يتحدد المركز اللحظي لسرعات الذراع AB في النقطة P_{AB} من العلاقة

$$\frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_B}{BP_{AB}} = \omega_{AB} \qquad 2$$

فنحسب أولاً السرعة الزاوية للذراع AB من العلاقة 2

$$\omega_{AB} = \frac{R\omega}{2R} \quad \Rightarrow \quad \omega_{AB} = \frac{\omega}{2} \qquad 3$$

ومنها نجد سرعة المنزلق B

$$v_B = R\,\omega \qquad 4$$

وعلى نفس المنوال، النقطة P_{BC} هي المركز اللحظي للسرعات للذراع BC

$$\frac{v_C}{CP_{BC}} = \frac{v_B}{BP_{BC}} = \omega_{BC} \qquad 5$$

$$\omega_{BC} = \frac{R\omega}{4R\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{BC} = \frac{\sqrt{2}\,\omega}{8} \qquad 6$$

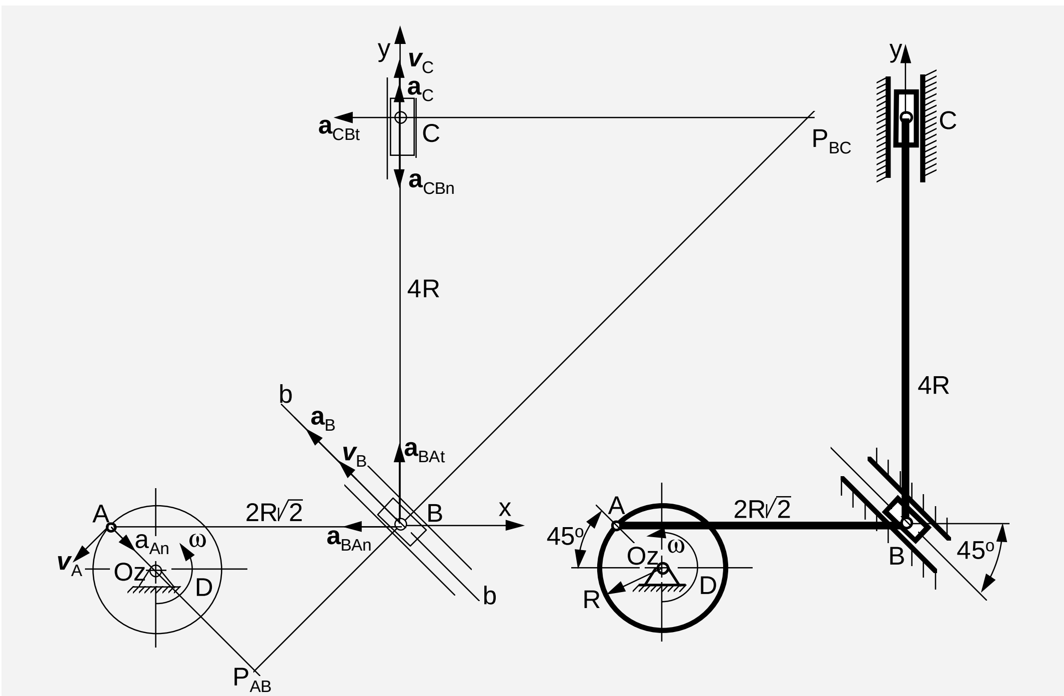
سرعة المنزلق C

$$v_C = 4R\frac{\omega}{4\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad v_C = \frac{\sqrt{2}}{2}R\,\omega \qquad 7$$

تسارع المنزلق B

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BAn} + \mathbf{a}_{BAt} \qquad 8$$

نحسب مركباته العمودية a_A و a_{BAn}



شكل م 15.2

$$a_A = a_{An} = R\,\omega^2$$

$$a_{BAn} = AB\,\omega^2_{AB} = 2\sqrt{2}\,R\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; a_{BAn} = \frac{\sqrt{2}}{2}R\,\omega^2 \qquad 9$$

ولأن خط عمل التسارع $\mathbf{a}_B$ هو خط حركة المنزلق داخل المجرى المائل، أي الخط b-b، بينما خط عمل التسارع المماسي a_{BAt} هو الذراع BC، نسقط المعادلة الاتجاهية 8 على محورٍ يجعل تأثير المركبة a_{BAt} المجهولة أصلاً على هذا المحور صفراً، أي على المحور الأفقي Ax

$$\boldsymbol{i}\;:\; -a_B\cos 45^o = +a_{An}\cos 45^o - a_{BAn}$$

$$a_B = -R\,\omega^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}R\,\omega^2 / \cos 45^o \;\Rightarrow\; a_B = 0$$

ولحساب التسارع الزاوي للذراع AB ، نسقط المعادلة 8 على المحور الرأسي By

$$\boldsymbol{j}\;:\; a_B\cos 45^o = -a_{An}\cos 45^o + a_{BAt}$$

$$0 = -R\,\omega^2\cos 45^o + AB\,\varepsilon_{AB} \;\Rightarrow\; \varepsilon_{AB} = \frac{\omega^2}{4} \qquad 10$$

تسارع المنزلق C

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CBn} + \mathbf{a}_{CB\,t} \qquad 11$$

$$\boldsymbol{j}\;:\; a_C = 0 - a_{CBn} = 0 - BC\,\omega^2_{BC} = -4R\left(\frac{\sqrt{2}\,\omega}{8}\right)^2$$

$$a_C = -\frac{R\omega^2}{8} \;,\; \mathbf{a}_C = -\frac{R\omega^2}{8}\,\boldsymbol{j} \qquad 12$$

ولإيجاد التسارع الزاوي للذراع BC ، نسقط المعادلة 11 على المحور Ax

$$\boldsymbol{i} \;:\; 0 = 0 - a_{CB\,t} \Rightarrow a_{CBt} = 0 \quad \Rightarrow \varepsilon_{BC} = 0 \qquad 13$$

سؤال م 16.2

تدور الصفيحة القطاعية OAB حول المحور الأفقي Ox وتسحب معها الذراع BC والمنزلق C المتحرك في مجرى أفقي مستقيم، وكذلك الذراع AD مع المنزلق D المتحرك داخل مجرى دائري في المستوى الرأسي Oyz. أوجد سرعة وتسارع المنزلقين C و D وكذلك التسارع الزاوي للذراعين ε_{AD} و ε_{BC}. خصائص الصفيحة الكينماتيكية التالية: سرعتها الزاوية حول المحور الأفقي المار في O تساوي ω، بينما تسارعها الزَّاويّ يساوي ε، $w = \omega\,\boldsymbol{i}$ و $e = \omega^2\boldsymbol{i}$ ونصف قطر المجرى 3R.

الحـــل

نحدد المركز اللحظي للسرعات للذراع BC وهي النقطة P_{BC} فنحسب

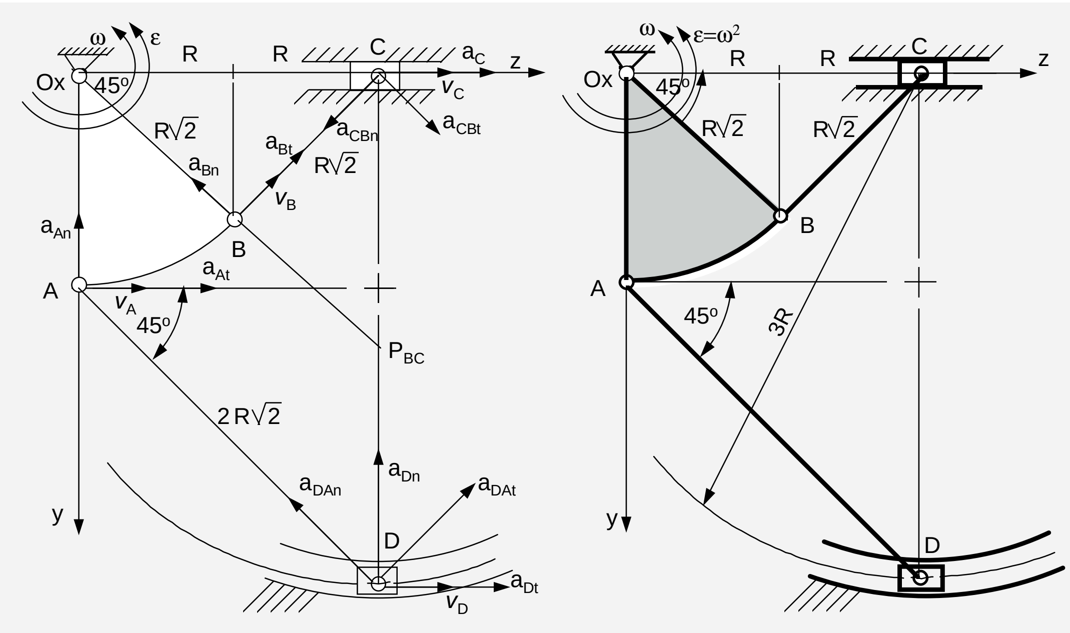
$$v_A = v_B = \sqrt{2}\,R\,\omega_{ABO} = \sqrt{2}\,R\omega = BP_{BC} \times \omega_{BC} = \sqrt{2}\,R\omega$$

$$\therefore \quad \omega_{BC} = \omega \;\; \& \quad \mathrm{w}_{BC} = -\omega\,\boldsymbol{i} \qquad 1$$

$$v_C = CP_{BC} \times \omega_{BC} = 2\,R\,\omega \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boldsymbol{v}_C = 2\,R\,\omega\;\boldsymbol{k} \qquad 2$$

بينما المركز اللحظي للسرعات للذراع AD في الما لا نهاية $P_{AD} = \infty \Rightarrow \omega_{AD} = 0$

$$v_A = v_D = \sqrt{2}\,R\,\omega \qquad \therefore \quad \boldsymbol{v}_D = \sqrt{2}\,R\,\omega\,\boldsymbol{k} \qquad 3$$



شكل م 16.2

لأن $\boldsymbol{v}_A$ // $\boldsymbol{v}_B$، انظر **الشكل** 26.2. نحسب تسارع المنزلق C

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB} = \mathbf{a}_{Bn} + \mathbf{a}_{Bt} + \mathbf{a}_{CBn} + \mathbf{a}_{CB\,t} \qquad 4$$

حيث إن

$$a_{Bn} = \sqrt{2}\,R\,\omega^2 \;\;\&\;\; a_{Bt} = \sqrt{2}\,R\,\omega^2 \qquad 5$$

$$a_{CBn} = \overline{BC} \times \omega_{BC}^2 = \sqrt{2}\,R\omega^2 \qquad 6$$

وبإسقاط المعادلة 4 على الذراع BC يكون

$$a_C \cos 45^o = a_{Bt} - a_{CBn}$$

$$a_C \cos 45^o = \sqrt{2}\,R\,\omega^2 - \sqrt{2}\,R\,\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_C = 0 \qquad 7$$

بينما إسقاطها (معادلة 4) على الخط المتعامد مع الذراع BC يكون

$$0 = a_{Bn} - a_{CB\,t}$$

$$0 = \sqrt{2}\,R\,\omega^2 - \sqrt{2}\,R\,\varepsilon_{BC}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{BC} = \omega^2 \qquad e_{BC} = -\,\omega^2\,\boldsymbol{i} \qquad 8$$

تسارع المنزلق D

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{DA} \Rightarrow \mathbf{a}_{Dn} + \mathbf{a}_{Dt} = \mathbf{a}_{An} + \mathbf{a}_{At} + \mathbf{a}_{DAn} + \mathbf{a}_{DAt} \qquad 9$$

حيث إن

$$a_{An} = \sqrt{2}\,R\,\omega^2,\; a_{At} = \sqrt{2}\,R\varepsilon = \sqrt{2}\,R\omega^2,\;\; a_{DAn} = \overline{AD} \times \omega_{AD}^2 = 0 \;\;\&$$

$$a_{Dn} = \frac{v_D^2}{3R} = \frac{2R^2\,\omega^2}{3R} = \frac{2}{3}R\,\omega^2 \qquad 10$$

وبإسقاط المعادلة 9 على سالب المحور Oy يكون

$$-\,\boldsymbol{j}: a_{Dn} = a_{An} + a_{DAt}\cos 45^o$$

$$a_{DAt} = \left(\frac{2}{3}R\,\omega^2 - \sqrt{2}\,R\omega^2\right) / \cos 45^o$$

$$a_{DAt} = -\frac{6-2\sqrt{2}}{3}R\omega^2 \;\;\&\;\; \mathbf{a}_{DAt} = \frac{6\sqrt{2}-4}{6}R\omega^2\left[\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\right] \qquad 11$$

وأخيراً نحسب التسارع الزاوي للذراع AD كما يلي

$$\varepsilon_{AD} = \frac{a_{DAt}}{AD} = \frac{\frac{6-2\sqrt{2}}{3}R\omega^2}{2R\sqrt{2}} \quad \& \quad e_{AD} = -\frac{3\sqrt{2}-2}{6}\omega^2\,\boldsymbol{i} \qquad 13$$

وبإسقاط المعادلة 9 على المحور Oz

$$\boldsymbol{k}: a_{Dt} = a_{At} - a_{DAt}\cos 45^o$$

$$a_{Dt} = \sqrt{2}\,R\,\omega^2 - \frac{6\sqrt{2}-4}{6}R\omega^2 \;,\; a_{Dt} = \frac{2}{3}R\,\omega^2 \qquad 14$$

ومن المقادير 10 - 14 نحسب تسارع المنزلق D

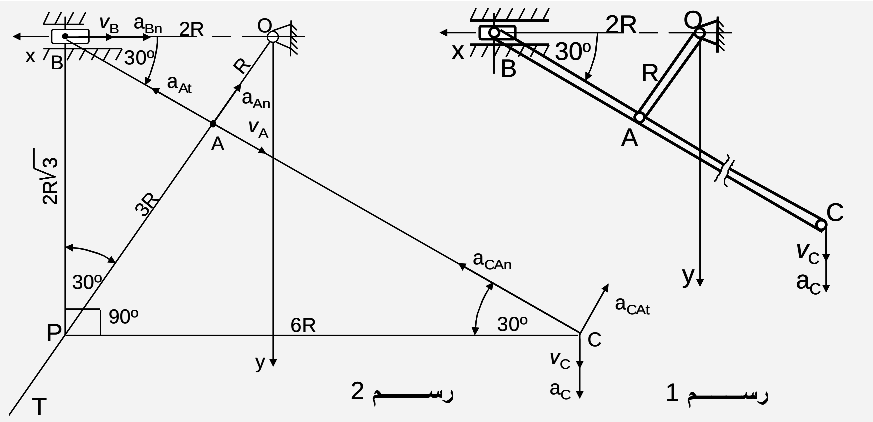
$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_{Dn} + \mathbf{a}_{Dt} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R\,\omega^2\left[-\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right] \qquad 15$$

سؤال م 17.2

إذا كان تسارع وسرجهة النقطة C على امتداد الذراع BA محددين بالمتجهين

$\mathbf{a}_C = 4R\sqrt{3}\,\omega^2\,\boldsymbol{j}\,[m^2/s]$ & $\boldsymbol{v}_C = 6\,R\omega\,\boldsymbol{j}\,[m/s]$

حدد موقع النقطة C، ثمَّ اوجد التسارع الزاوي للمرفق OA.



شكل م 17.2

الحـــــل

يقع P المركز اللحظي للسرعات للذراع BC على نفس المستوى الأفقي مع النقطة C وهو أسفل النقطة B. متجه السرجهة $\boldsymbol{v}_A$ عمودي على الخط OA، وهو أيضاً عمودي على الخط AT. لذلك، فالخطين OA و AT متسامتان - على نفس الامتداد، وتقاطع امتدادهما مع الخط الرأسي من B يعرف موقع النقطة P. لذلك، فمن **رسم** 2، يمكن كتابة العلاقة التالية

$$\frac{v_C}{PC} = \frac{v_B}{PB} = \frac{v_A}{3R} = \omega_{CB} \qquad 1$$

وحيث القيم PC = 6R و $PB = 2R\sqrt{3}$ ، فإن

$$\omega_{CB} = \frac{v_C}{PC} = \frac{6R\omega}{6R} = \omega \;\Rightarrow\; \omega_{CB} = \omega\;[rad/s] \qquad 2$$

$$v_A = 3\,R\,\omega_{CB} = R\,\omega_{OA} \;\Rightarrow\; \omega_{OA} = 3\,\omega\;[rad/s] \qquad 3$$

$$v_B = 2\sqrt{3}R\omega\;[m/s] \qquad 4$$

التسارع

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{An} + \mathbf{a}_{At} + \mathbf{a}_{CAn} + \mathbf{a}_{CAt} \qquad 5$$

$$a_{CAn} = AC\,\omega_{BC}^2 = 3R\sqrt{3}\,\omega^2 \quad a_{At} = R\,\varepsilon_{OA}\;\&\; a_C = 4R\sqrt{3}\,\omega^2\;[m^2/s]$$

$$\text{eq 5 : BC} \;\Rightarrow\; a_C\cos 60 = 0 - a_{At} + a_{CAn}$$

$$4R\sqrt{3}\,\omega^2\cos 60 = 0 - R\,\varepsilon_{OA} + 3R\sqrt{3}\,\omega^2 \qquad 6$$

$$\varepsilon_{OA} = 5\sqrt{3}\,\omega^2\,[s^{-2}] \;\Rightarrow\; \mathbf{e}_{OA} = 5\sqrt{3}\,\omega^2\,\boldsymbol{k}\,[s^{-2}] \qquad 7$$

5.2 حركة الجسيم المركبة Compound Motion

لقد درست حتى الآن حركة الجسيم والجسم الجاسئ المطلقة بالنسبة لإطار إسنادٍ واحد هو القصوري. غير أنه يحدث أن حركة الجسيم تتم بالنسبة لإطاري إسنادٍ في آنٍ معاً، أحدها ثابت اصطلاحاً والآخر متحرك بالنسبة للأول. عندئذ تكون حركة الجسيم مركبةً من الحركتين التاليتين: الحركة بالنسبة لإطار الإسناد المتحرك والأخرى حركة إطار الإسناد المتحرك بالنسبة لإطار الإسناد الثابت، وهذه الأخيرة يكتسبها الجسيم. وبينما تدعى حركة الجسيم بالنسبة لإطار الإسناد الثابت بالحركة المطلقة، وحركته بالنسبة لإطار الإسناد المتحرك بالحركة النسبية، تدعى حركة إطار الإسناد المتحرك بالنسبة لإطار الإسناد الثابت والتي يكتسبها الجسيم بالحركة المكتسبة.

ونسمِّي أيضاً مفهومي السرعة والتسارع بالنسبة للحركة المركبة. فالسرعة المطلقة هي سرعة الجسيم بالنسبة لإطار الإسناد الثابت، بينما السرعة النسبية فهي سرعته المقيسة بالنسبة لإطار إسنادٍ متحرك. والشيء نفسه ينطبق على التسارعين المطلق والنسبي بالنسبة لإطاري الإسناد الثابت والمتحرك على الترتيب.

فعلى سبيل المثال، يمكن اعتبار حركة كرةٍ مقذوفةٍ على سطح باخرةٍ تتحرك في البحر، حركةً مركبةً من الحركتين التاليتين: الحركة على سطح الباخرة وحركة الباخرة بالنسبة للشاطئ. وبينما نسمِّي الأولى الحركة النسبية للجسيم ندعو الأخرى بالحركة المكتسبة. ومجموع الحركتين يشكل حركة الكرة المطلقة. وبالعادة يكون الإطار المرتبط ارتباطاً وثيقاً بالباخرة إطار الإسناد المتحرك والإطار المرتبط بالشاطئ إطار الإسناد الثابت. ومن الطبيعي أن يلاحظ راكب السفينة أن الكرة تأخذ مساراً يختلف عما يلاحظه آخر يقف على الشاطئ، مع أن المسارين متكافئان ، بل إنّهما مسارٌ واحد.

ومن التطبيقات العملية للحركة المركبة الحركة على سطح الأرض. فبينما تدور الأرض حول محورها دوراناً منتظماً وبشكلٍ متواصل، تتحرك الأجسام على سطحها، بما يعني اكتســـاب هذه الأجسام الحركة الدورانية للأرض. وتستخدم هذه الحركة في الديناميكا لدراسة الاتزان النسبي وانحراف المقذوفات نتيجة لدوران الأرض. وهذا ما سنراه ضمن **الباب السابع - حركة الجسيم النسبية**.

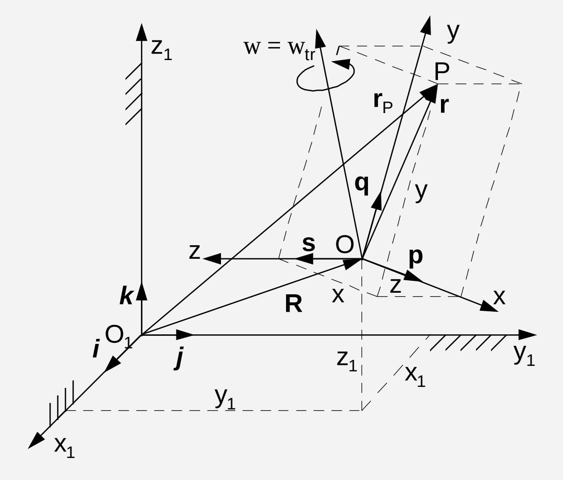
1.5.2 سرجهة الجسيم المطلقة Absolute Velocity

إذا عرفنا حركة الجسيم P بالنسبة للمحاور المتحركة Oxyz بمتجه الموضع **r**، وبالنسبة للمحاور الثابتة $O_1x_1y_1z_1$ بمتجه الموضع الآخر $\mathbf{r}_P$، وحددنا حركة الإطار المتحرك بالنسبة للإطار الثابت بمتجه الموضع **R** لمركزه O بالنسبة للمركز الثابت O_1، **شكل 29.2**، فإن

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{R} + \mathbf{r} \qquad 77.2$$

وفي نفس الوقت الذي يتحرك فيه مركز إطار الإسناد المتحرك بالسرجهة $\boldsymbol{v}_O$ والتسارع $\mathbf{a}_O$، تدور محاوره بالسرعة الزاوية اللحظية w والتسارع الزاوي اللحظي e. هذه الكميات الأربعة مقيسة بالنسبة لمركز الإطار الثابت. ومن الطبيعي أن لا تكون الكميتان w و e متطابقتين اتجاهاً إلا في الحالة التي تكون فيها الحركة النسبية حركة مستوية.

تتحدد السرجهة المطلقة للجسيم P بمشتقة متجه موضعه بالنسبة لمركز الإحداثيات الثابتة O، معادلة 77.2. أو رياضياً



شكل 29.2

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad 78.2$$

حيث إن $\boldsymbol{v}_O = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ السرجهة المطلقة للمركز O (بالنسبةِ للمركز الثابت O_1). نحلل الجزء الثاني $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$، فنبدأ من متجه موضع الجســيم P بالنسبة إلى المحاور المتحركة بدلالة مركباته x، y و z ومتَّجِهات الوَحْدَة المتحركة **p** ، **q** و **s** ، فنكتب

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{p} + y\,\mathbf{q} + z\,\mathbf{s}$$

معدل تغير متجه موضع الجســيم **r**

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{p} + \frac{dy}{dt}\mathbf{q} + \frac{dz}{dt}\mathbf{s} + x\frac{d\mathbf{p}}{dt} + y\frac{d\mathbf{q}}{dt} + z\frac{d\mathbf{s}}{dt} \qquad 79.2$$

حيث تمثل الحدود الأولى السرجهة النسبية

$$\boldsymbol{v}_r = \frac{dx}{dt}\mathbf{p} + \frac{dy}{dt}\mathbf{q} + \frac{dz}{dt}\mathbf{s} \qquad 80.2$$

وبينما الوَحَدَات الاتجاهية ***i*** ، ***j*** و ***k*** للمحاور الديكارتية الثابتة x_1 ، y_1 و z_1 وَحَدَاتٌ ثابتة مقداراً واتجاهاً لثبات المحاور نفسها، يتغير اتجاه متَّجِهَات الوَحْدَة للمحاور المتحركة **p** ، **q** و **s** لدورانها مع المحاور. ويتحدد معدل تغير هذه الوَحَدَات الاتجاهية الجديدة بالعلاقات التالية

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = w \times \mathbf{p} \;,\quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = w \times \mathbf{q} \;,\quad \frac{d\mathbf{s}}{dt} = w \times \mathbf{s} \qquad 1.81.2$$

وبالتالي يؤول مجموع الحدود الثلاثة الأخيرة في المعادلة 79.2 إلى المجموع الجديد

$$x\frac{d\mathbf{p}}{dt} + y\frac{d\mathbf{q}}{dt} + z\frac{d\mathbf{s}}{dt} = x\,w \times \mathbf{p} + y\,w \times \mathbf{q} + z\,w \times \mathbf{s} = w \times [x\mathbf{p} + y\mathbf{q} + z\mathbf{s}]$$

$$x\frac{d\mathbf{p}}{dt} + y\frac{d\mathbf{q}}{dt} + z\frac{d\mathbf{s}}{dt} = w \times \mathbf{r} \qquad 81.2$$

وباستبدال السرجهة النسبية، معادلة 80.2 و w×**r**، معادلة 81.2 في المعادلة 79.2، ينتج أن معدل تغير متَّجِه الموضع **r** يتحدد بالشكل المقتضب التالي

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{v}_r + w \times \mathbf{r} \qquad 82.2$$

كما أن استبدال قيمة $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ الناتجة وتعويضه في المعادلة 78.2، ينتج سرجهة الجسيم المطلقة

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_r + w \times \mathbf{r} \qquad 83.2$$

والتي تساوي المجموع الاتجاهي للسرجهة المطلقة لمركز الإحداثيات المتحركة $\boldsymbol{v}_O$ وسرجهة الجسيم النسبية $\boldsymbol{v}_r$، مضافاً إليهما سرجهة 'P المثبتة إلى المحاور المتحركة Oxyz والمرتبطة ارتباطاً وثيقاً بالنقطة (الجسيم) P في اللحظة الزمنية المعينة بالنسبة لمركز الإحداثيات المتحركة، أي $w \times \mathbf{r}$. وإذا كان الجسيم P مثبتاً تثبيتاً صلباً بالإطار المتحرك في الموقع 'P، عندئذ تكون السرجهة النسبية للجسيم مساوية للصفر $\boldsymbol{v}_r = 0$. والمعادلة 83.2 تؤول إلى الشكل التالي

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_O + \ w\ ´\ \mathbf{r}$$

والتي تمثل السرجهة المكتسبة للجسيم P نتيجة تواجده في اللحظة المعينة في الموقع 'P بالنسبة للمركز O. وإذا رمزنا لها بالرمز $\boldsymbol{v}_{tr}$، فإن

$$\boldsymbol{v}_{tr} = \boldsymbol{v}_O + \ w\ ´\ \mathbf{r} \qquad 84.2$$

والمعادلة 83.2 تأخذ الشكل الجديد

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_{tr} \qquad 85.2$$

أي أن سرجهة الجسيم المطلقة $\boldsymbol{v}_P$ تكافئ المجموع الاتجاهي للسرجهتين النسبية $\boldsymbol{v}_r$ والمكتسبة $\boldsymbol{v}_{tr}$.

2.5.2 تسارع الجسيم المطلق Absolute Acceleration

يتحدد متجه التسارع المطلق كمشتقة ثانية لمتجه موضع الجسيم بالنسبة للمركز O_1، معادلة 77.2، أو كمشتقة أولى لسرجهة الجسيم المطلقة، معادلة 83.2

$$\mathbf{a}_P = \frac{d^2\mathbf{r}_P}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{v}_P}{dt}$$

$$\mathbf{a}_P = \frac{d\boldsymbol{v}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt} + \frac{d\left(w\ ´\ \mathbf{r}\right)}{dt} \qquad 86.2$$

الحد الأول في المعادلة 86.2 يمثل

$$\mathbf{a}_O = \frac{d\boldsymbol{v}_O}{dt} \qquad 87.2$$

(متجه) التسارع المطلق للمركز O. نكتب الحد الثاني

$$\frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dx}{dt}\mathbf{p} + \frac{dy}{dt}\mathbf{q} + \frac{dz}{dt}\mathbf{s}\right\}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{p} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{q} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{s} + \frac{dx}{dt}\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\mathbf{s}}{dt} \qquad 88.2$$

حيث تمَثِّل الحدود الثلاثة الأولى التسارع النسبي $\mathbf{a}_r$

$$\mathbf{a}_r = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{p} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{q} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{s} \qquad 89.2$$

بينما تمثل الحدود الثلاثة الأخيرة، معادلة 88.2 بعد استبدال معدَّلات تغير الوَحَدَات الاتجاهية للمحاور المتحركة بقيمها من المعادلات 1.81.2

$$\frac{dx}{dt}\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\mathbf{s}}{dt} = w \times \left\{\frac{dx}{dt}\mathbf{p} + \frac{dy}{dt}\mathbf{q} + \frac{dz}{dt}\mathbf{s}\right\} = w \times \boldsymbol{v}_r \qquad 90.2$$

ولينتج أخيراً أن معدل تغيَّر السرجهة النسبية يتحدد بالشكل المقتضب التالي

$$\frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt} = \mathbf{a}_r + w ´ \boldsymbol{v}_r \qquad 91.2$$

أما الحد الثالث في المعادلة 86.2، فيكتب كمعدل حاصل ضرب اتجاهي

$$\frac{d(w \times \mathbf{r})}{dt} = \frac{dw}{dt} \times \mathbf{r} + w \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad 92.2$$

حيث إن معدل تغير السرجهة الزاوية يساوي التسارع الزاوي $e = \frac{dw}{dt}$، بينما يُمَثِّل الجزء الثاني في المعادلة 92.2 حاصل الضرب الاتجاهي للسرجهة الزاوية w ومعدل تغير متجه موضع الجسيم **r**. وباستبدال الجزء الأخير $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ بقيمته من المعادلة 82.2، ينتج أن

$$\frac{d(w \times \mathbf{r})}{dt} = e \times \mathbf{r} + w \times [\boldsymbol{v}_r + w \times \mathbf{r}]$$

أو

$$\frac{d(w \times \mathbf{r})}{dt} = e \times \mathbf{r} + w \times \boldsymbol{v}_r + w \times w \times \mathbf{r} \qquad 93.2$$

وبتعويض المعادلات 87.2 ، 89.2 و 93.2 في المعادلة الرئيسية 86.2، ثم ترتيب الناتج نحصل على

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_r + w ´ \boldsymbol{v}_r + e ´ \mathbf{r} + w ´ \boldsymbol{v}_r + w ´ w ´ \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_r + e ´ \mathbf{r} + 2w ´ \boldsymbol{v}_r + w ´ w ´ \mathbf{r} \qquad 94.2$$

وإذا ما عرفنا متجه تسارع الجسيم المكتسب $\mathbf{a}_{tr}$ عندما انعدام الحركة النسبية $\boldsymbol{v}_r = 0$، فإن

$$\mathbf{a}_{tr} = \mathbf{a}_O + e ´ \mathbf{r} + w ´ w ´ \mathbf{r} \qquad 95.2$$

ومتجه التسارع الكوريوليسي

$$\mathbf{a}_{cor} = 2\, w \times \boldsymbol{v}_r \qquad 96.2$$

فمن الممكن صياغة المعادلة 94.2 بالشكل المقتضب التالي

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_{cor} \qquad 97.2$$

وتحدد المعادلة 97.2 متجه التسارع المطلق لأحد جسيمات الجسم الجاسئ، وتمثل الشكل الرياضي **لنظرية كوريوليس**[8] التي تنص: **متجه تسارع الجسيم المطلق يساوي المجموع الإتجاهي لمتجه تسارعه المكتسب ومتجه تسارعه النسبي ومتجه تسارعه الكوريوليسي.** وبينما يبين متجه تسارع الجسيم المكتسب التغيرَ في سرجهته المكتسبة خلال حركته المكتسبة ويبين متجه تسارعه النسبي التغيرَ في سرجهته النسبية خلال حركته النسبية فإن متجه تسارعه الكوريوليسي يبين التغيرَ في سرجهته النسبية خلال حركته المكتسبة مضافاً إليه التغيرَ في سرجهته المكتسبة خلال حركته النسبية. وإذا كانت الحركة المكتسبة انتقاليةً w = 0، يتلاشى التسارع الكوريوليسي $\mathbf{a}_{cor} = 0$، وتؤول المعادلة 97.2 إلى الشكل التالي

[8] **ج . كوريوليس** Coriolis ،G.، 1843 - 1792-، عالم فرنسي، اشتهر بأبحاثه في مجالات الميكانيكا التطبيقية والنظرية.

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_r \qquad 98.2$$

أي أن متجه التسارع المطلق يساوي المجموع الاتجاهي للتسارعين النسبي والمكتسب.

حساب مركبات التسارع المطلق

يحسب التسارعان النسبي والمكتسب وفقاً لمعادلات الكينماتيكا الأساسية. التسارع المكتسب يحسب كتسارع جسمٍ آخر مثبتٍ بالمحاور ومتحركٍ معها، أو بشكلٍ آخر كما لو أن الحركة النسبية معدومة، معادلة 95.2. والعكس صحيح أيضاً بالنسبة للتسارع النسبي. إذ إنه يُحسب كما لو أن الحركة النسبية هي الحركة الوحيدة، المعادلات 74.2 - 76.2. كما يحسب تسارع كوريوليس بالمعادلة الاتجاهية 96.2 كضعف حاصل الضرب الإتجاهي لسرجهة الجسم الجاسئ الزاوية المكتسبة والسرجهة النسبية للجسيم. وإذا رمزنا للزاوية المحصورة بين المتجهين $\boldsymbol{v}_r$ و w بالرمز φ فإن مقدار تسارع كوريوليس ، انظر معادلة 27.I

$$a_{cor} = |\mathbf{a}_{cor}| = 2\,\omega\, v_r \sin\varphi \qquad 99.2$$

واتجاهه عمودياً على المستوى المكون من المتجهين وللزاوية الأصغر بينهما.

حل المسائل

يقوم حل مسائل الحركة المركبة للجسيم على تحليل مركباتها الاثنتين، الحركة المكتسبة والحركة النسبية. وعلى ذلك تغدو الحركة المطلقة معروفة.

1 - حدّد للّحظة المعينة مركزي المحاور الثابتة والمتحركة، وارسم المحاور أيضاً. وفي العادة إمّا أن يكون المركزان متطابقين، أو أن تكون المحاور متسامتة و/أو متوازية.

2 - عرّف الحركة النسبية للجسيم ، تتحدد تبعاً لذلك السرجهة النسبية والتسارع النسبي. استخدم المعادلة 5.2 لتعريف إزاحة الجسيم في الإحداثيات الطبيعية، ومنها أوجد السرجهة، معادلة 31.2، والتسارع، معادلة 47.2.

3 - عرف الحركة المكتسبة للجسيم، الناتجة من ارتباطه مع جسيمٍ آخر في الموضع المعين، معادلات 70.2 و76.2.

4 - عرف الحركة المطلقة للجسيم كالحركة الناتجة من مجموع الحركتين النسبية والمكتسبة. وفي هذا الصدد تكون السرجهة المطلقة مكافئةً للمجموع الاتجاهي للسرجهتين النسبية والمكتسبة. كما تُضاف مركبة التسارع الكوريوليسي للمجموع الاتجاهي لمركبة التسارعين النسبي والمكتسب لحساب التسارع المطلق.

أسـئـلـةٌ مـحـلـولـة

سؤال م 18.2

يتدحرج طوقٌ دائريٌ منتظم، بدون انزلاق على سطحٍ أفقي ثابت بسرعةٍ ثابتةٍ لمركزه، مقدارها $v_O = 3v$. وفي الوقت نفسه تتسلق حلقةٌ صغيرةٌ على محيط الطوق بسرعةٍ نسبية ثابتةٍ، $v_r = v = \text{const.}$ احسب السرعة المطلقة والتسارع المطلق للحلقة عند وصولها للموقع P_1 و P_2 المحددين في الشكل.

الـحـــل

يعتبر تدحرج الطوق بدون انزلاق على السطح الأفقي مثالاً كلاسيكياً على الحركة المستوية. وباعتبار أن سرعة مركزه ثابتة تكون سرعته الزاوية ثابتة أيضاً

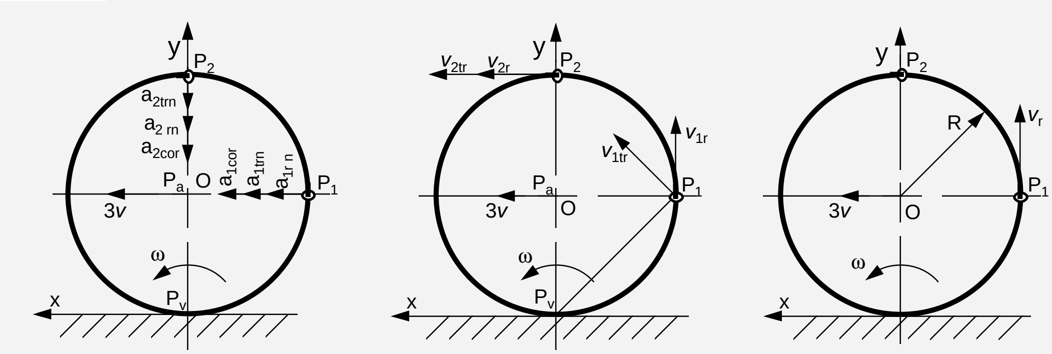
$$3v = R\,\omega \Rightarrow \omega = \frac{3v}{R} = \text{const.} \qquad 1$$

وتبعاً لذلك، يساوي تسارعه الزاوي صفراً

$$\varepsilon = d\omega / dt = 0 \qquad 2$$

سرجهة الحلقة المطلقة عند وصولها للموقع P_1

$$\boldsymbol{v}_{P_1} = \boldsymbol{v}_{P_1'} + \boldsymbol{v}_{1r} \quad , \quad P_1' \in \text{الطوق} \qquad 3$$



شكل م 18.2

حيث أن النقطة P_1' نقطةٌ على الطوق مباشرة حيثما تتواجد الحلقة. وللمركز اللحظي للسرعات P_v الملامس للطوق مع السطح الأفقي يكون

$$v_{P_1'} = v_{1tr} = R\sqrt{2}\,\frac{3v}{R} \Rightarrow v_{P_1'} = 3\sqrt{2}\,v \qquad 4$$

$$v_{1r} = v \qquad 5$$

وبالتالي تحسب السرجهة المطلقة إتجاهياً

$$\boldsymbol{v}_{P_1} = 3\sqrt{2}\,v\,(\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\,) + v\,\boldsymbol{j}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v}_{P1} = 3\,v\,\boldsymbol{i} + 4\,v\,\boldsymbol{j} \;,\; v_{P1} = 5\,v \qquad 6$$

سرجهة الحلقة المطلقة عند وصولها للموقع P_2

$$\boldsymbol{v}_{P_2} = \boldsymbol{v}_{P_2'} + \boldsymbol{v}_{2r} \quad , \quad P_2' \in \text{الطوق} \qquad 7$$

$$v_{P_2'} = v_{2\,tr} = 2\,R\,\frac{3v}{R} \Rightarrow v_{P_2'} = 6\,v \qquad 8$$

$$v_{2r} = v \qquad 9$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v}_{P_2} = 7\,v\,\boldsymbol{i} \;,\; v_{P_2} = 7\,v \qquad 10$$

التسارع المطلق للحلقة في الموضع P_1

$$\mathbf{a}_{P_1} = \mathbf{a}_{P_1'} + \mathbf{a}_{1r} + \mathbf{a}_{1\,cor} \qquad 11$$

التسارع المكتسب

$$a_{P_1'} = a_{1tr} = a_{1trn} = R\,\omega^2 = R\left(\frac{3v}{R}\right)^2 \Rightarrow a_{P_1'} = a_{1tr} = 9\,\frac{v^2}{R} \qquad 12$$

باتجاه المركز O (المركز اللحظي للتسارع P_a). والتسارع النسبي أيضاً باتجاه المركز

$$a_{1r} = a_{1rn} = R\left(\frac{v_{1r}}{R}\right)^2 \Rightarrow a_{1r} = \frac{v^2}{R} \qquad 13$$

كما أن تسارع كوريوليس باتجاه المركز

$$a_{1cor} = 2\,\omega\, v_r = 2\,\frac{3v}{R}\,v\ ,\ a_{1cor} = 6\,\frac{v^2}{R} \qquad 14$$

لنجد من المعادلات الثلاث الأخيرة 12 - 14 أن تسارع الحلقة المطلق لحظة وصولها للموضع P_1 يبلغ

$$\mathbf{a}_{P_1} = 16\,\frac{v^2}{R}\,\boldsymbol{i} \quad \& \quad a_{P_1} = 16\,\frac{v^2}{R} \qquad 15$$

التسارع المطلق للحلقة في الموضع P_2

$$\mathbf{a}_{P_2} = \mathbf{a}_{P_2'} + \mathbf{a}_{2r} + \mathbf{a}_{2cor} \qquad 16$$

التسارع المكتسب باتجاه المركز O وللأسفل

$$a_{P_2'} = a_{2\,tr} = a_{2trn} = 2\,R\,\omega^2 = 2\,R\left(\frac{3v}{R}\right)^2 \Rightarrow a_{P_2'} = 18\,\frac{v^2}{R} \qquad 17$$

والتسارع النسبي للأسفل

$$a_{2r} = a_{2rn} = R\left(\frac{v_{2r}}{R}\right)^2 \Rightarrow a_{1r} = \frac{v^2}{R} \qquad 18$$

كما أن تسارع كوريوليس باتجاه المركز وللأسفل أيضاً

$$a_{2cor} = 2\,\omega\, v_r = 2\,\frac{3v}{R}\,v\ ,\ a_{2cor} = 6\,\frac{v^2}{R} \qquad 19$$

لنجد من المعادلات الثلاث الأخيرة 17 - 19 أن التسارع المطلق للجسيم P_2 يبلغ

$$\mathbf{a}_{P_2} = -\,25\,\frac{v^2}{R}\,\boldsymbol{j} \quad \& \quad a_{P_2} = 25\,\frac{v^2}{R} \qquad 20$$

سؤال م 19.2

تدور منصةُ مستطيلة الشكل وأفقيةٌ حول المحور العمودي Ox_1 وفقاً للعلاقة الهندسية

$$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\pi \sin\frac{t}{3}$$

وفي الوقت نفسه يتحرك الجسيم P على سطح المنصة وَفْقَاً للحركة النسبية التالية

$$x = \cos 2t\ ,\ y = \sin t$$

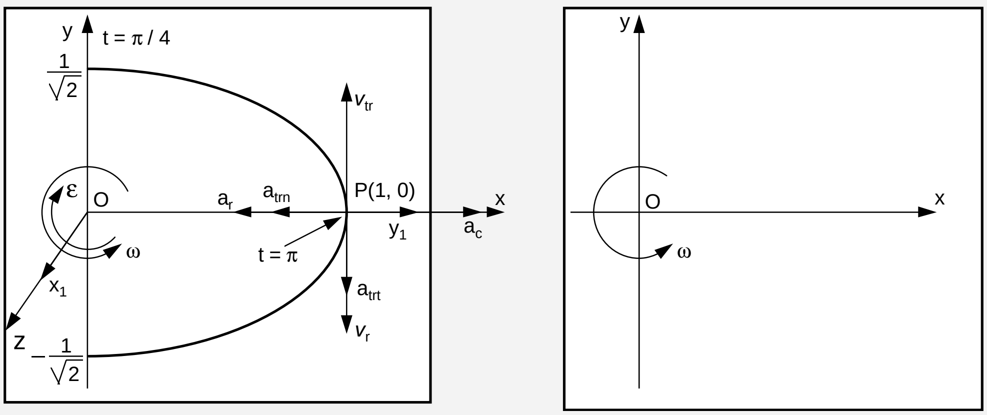
حيث يقاس الزمن t بالثواني، الزاوية φ بالدائرية [rad] والمسافات x و y بالأمتار. عرّف حركة الجسيم النسبية، واحسب السرعة المطلقة والتسارع المطلق للجسيم عند اللحظة $t=\pi[s]$.

الـــحـــل

نحذف بارامتر القياس، الزمن t، من معادلات الحركة النسبية فيكون

$$x = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t \quad \Rightarrow \quad x = 1 - 2y^2 \qquad 1$$

لنحصل على معادلة القطع المكافئ في مستوى الإحداثيات الديكارتي المتحرك Oxy. وفي اللحظة $t = \pi [s]$ يتواجد الجسيم P عند أقصى بعدٍ له عن محور الدوران. ولإيجاد سرعته المطلقة وتسارعه المطلق نحدد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي لدوران المنصة



شكل م 19.2

$$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi \sin\frac{t}{3} \quad , \quad t = \pi\,[s] \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3}{4}\pi\,[rad] \qquad 2$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{3}\,\pi\cos\frac{t}{3}, \quad t = \pi\,[s] \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi\;[rad./s] \qquad 3$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\sqrt{3}}{6}\,\frac{1}{3}\,\pi\sin\frac{t}{3}, \quad t = \pi\,[s] \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\pi}{12}\,[rad/s^2] \qquad 4$$

مركبات السرعة النسبية

$$\dot{x} = -2\sin 2t\,,\ \dot{x}\big|_{t=\pi} = 0 \quad \& \quad \dot{y} = \cos t,\ \dot{y}\big|_{t=\pi} = -1 \qquad 5$$

$$\boldsymbol{v}_r = -1\,\boldsymbol{j}\quad [m/s] \qquad 6$$

والسرعة المكتسبة $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP} = 1\boldsymbol{i}$

$$\boldsymbol{v}_{tr} = \boldsymbol{v}_{P'} = \omega \times \boldsymbol{r} = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi\,\boldsymbol{k} \times 1\boldsymbol{i} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_{tr} = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi\,\boldsymbol{j} \qquad 7$$

وبجمع مركبات السرجهة من العلاقتين 6 و 7، نحصل على السرجهة المطلقة

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_{tr} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_P = -\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi\right)\boldsymbol{j}\quad [m/s] \qquad 8$$

لحساب تسارع الجسيم نحدد مركباته. التسارع المكتسب العمودي

$$a_{trn} = \overline{OP} \times \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{144}\pi^2\,[m/s^2]$$

$$\mathbf{a}_{trn} = -\frac{3}{144}\pi^2 \boldsymbol{i} \qquad 9$$

بينما التسارع المكتسب المماسي

$$\mathbf{a}_{tr} = \text{e} \times \mathbf{r} = -\frac{\pi}{12}\boldsymbol{k} \times 1\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{a}_{trt} = -\frac{\pi}{12}\boldsymbol{j} \qquad 10$$

وتبعاً لذلك، يساوي التسارع المكتسب محصلة المركبتين 9 و 10

$$\mathbf{a}_{tr} = -\frac{3}{144}\pi^2 \boldsymbol{i} - \frac{\pi}{12}\boldsymbol{j} \qquad 11$$

التسارع النسبي

$$a_{rx} = \ddot{x} = -4\cos 2t \;, a_{rx}\big|_{t=\pi} = \ddot{x}\big|_{t=\pi} = -4 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$a_{ry} = \ddot{y} = -\sin t \;, \; a_{ry}\big|_{t=\pi} = \ddot{y}\big|_{t=\pi} = 0$$

$$\mathbf{a}_r = -4\boldsymbol{i} \qquad 12$$

أما التسارع الكوريوليسي فيبلغ من المعادلة 3

$$\mathbf{a}_C = 2\,\text{w} \times \boldsymbol{v}_r = 2\,\omega\,\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{-j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_C = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\,\boldsymbol{i} \qquad 13$$

وأخيراً يتحدد التسارع المطلق للجسيم بجمع كل المركبات الأخيرة، معادلات 9 - 13

$$\mathbf{a}_P = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\pi - 4 - \frac{3}{144}\pi^2\right)\boldsymbol{i} - \frac{\pi}{12}\boldsymbol{j} \qquad 14$$

تنبيه: حل هذا السؤال عندما الزمن $t_2=2\pi$. أنظر **سؤال** م 2.2.

سؤال م 20.2

تتأرجح أنبوبةٌ دائرية مثبتةٌ إلى القضيب OA في مستوى عمودي حسب العلاقة

$$\varphi = \tfrac{1}{3}\pi \sin t \;\; [\text{ rad. }] \qquad 1$$

ومنذ لحظة البداية $t=0[s]$ ، إبتدأ جسيم الحركة داخل الأنبوبة من الموضع A_0 بعكس عقارب الساعة وَفْقاً للمعادلة

$$S = \frac{18}{\pi} R\, t^2 \;\; [\text{ m }] \qquad 2$$

احسب مركبات السرجهة المطلقة ومركبات مُتَّجِه التسارع المطلق للجسيم في اللحظة $t=\frac{\pi}{6}$ [s] .

الــحـــل

في اللحظة $t=\frac{\pi}{6}$ [s] ، يدور القضيب ومعه الأنبوبة وفقاً للمعادلة 1 بالمقدار

$$\varphi = 30^o \qquad 3$$

كما يصل الجسيم داخل الأنبوبة إلى الموضع A_1

$$S = \frac{1}{2} R\,\pi \; [\text{ m}] \qquad 4$$

سرجهة الجسيم المطلقة لحظة وصوله للموضع A_1، **رسم** 2

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{1'} + \boldsymbol{v}_r \quad \Rightarrow \qquad 5$$

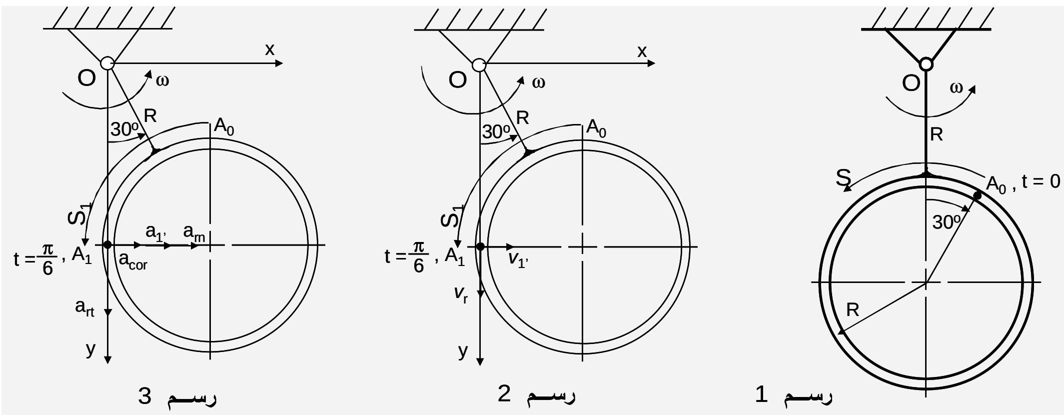
مركبة السرجهة المكتسبة

$$v_{1'} = v_{tr} = R\sqrt{3}\dot{\varphi}\Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = R\sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$$

$$v_{1'} = R\,\frac{\pi}{2}\ \ [\,m/s\,] \qquad 6$$

بينما مركبة السرجهة النسبية

$$v_r = \dot{S}_1 = 6\,R\ [\,m/s\,] \qquad 7$$



شكل م 20.2

مركبات متجه تسارع الجسيم عند وصوله للموقع A_1 ، **رسم** 3

$$\mathbf{a_1} = \mathbf{a}_{1'} + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_{cor} \qquad 8$$

حيث أن التسارع المكتسب

$$a_{1'} = a_{1'n} = \frac{v_{1'}^2}{R\sqrt{3}} = \frac{(0.5\,R\pi)^2}{R\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{12}\pi^2 \quad [\,m/s^2\,] \qquad 9$$

والتسارع النسبي

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_{rn} + \mathbf{a}_{rt}$$

$$a_{rn} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{\dot{S}^2}{R} = 36\,R\ \ [\,m/s^2\,] \qquad 10$$

$$a_{rt} = \ddot{S} = \frac{36R}{\pi}\,[\,m/s^2\,] \qquad 11$$

وأخيراً نحسب التسارع الكوريوليسي

$$a_{cor} = 2\dot{\varphi}_1 \cdot v_r = 2 \times \frac{\pi}{6}\sqrt{3}\cdot 6\,R \ \Rightarrow\ a_{cor} = 2\pi\,R\sqrt{3}\ \ [\,m/s^2\,] \qquad 12$$

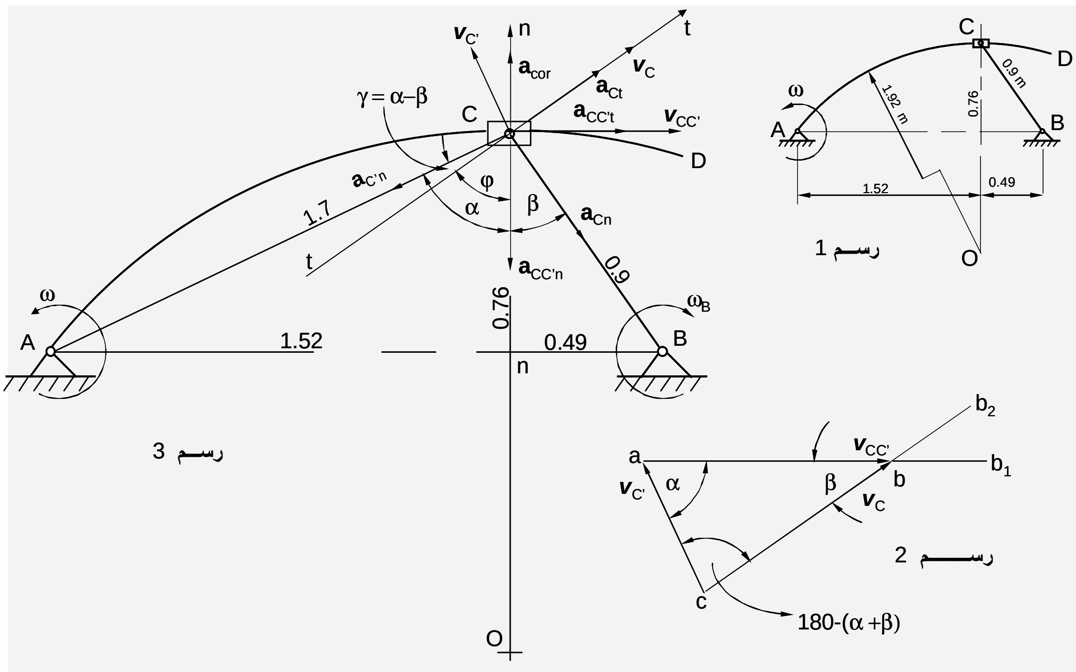
سؤال م 21.2

في الميكانيزم، **رسـم** 1، يتحرك الذراع AD بسرعةٍ زاوية ثابتة، مقدارها ω = 2 [rad/s]. ما السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للذراع BC؟

الــحــل

يتكون الميكانيزم من ذراعين، أحدهما قوسي AD والآخر BC والمرتبطان بعضهما مع بعض بواسطة المنزلق C.

لحساب سرجهة النقطة 'C، 'C∈ AD



شكل م 21.2

$v_{C'} = AC \times \omega = 1.7 \times 2 \;\Rightarrow\; v_{C'} = 3.4$ [m/s] 1

لحساب سرجهة المنزلق C يمكن استخدام الرسم السهماني، **رسم** 2، الذي يربط سرجهة المنزلق $\boldsymbol{v}_C$ مع سرجهة النقطة C’ على الذراع AD

$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_{C'} + \boldsymbol{v}_{CC'}$ 2

نرسم المثلث Cab، **رسم** 2: نرسم الخط Ca عمودياً على الخط AC انطلاقاً من النقطة C، وبطول 3.4 وَحْدَة (طول). نرسم الخط ab_1 انطلاقاً من النقطة a موازياً للحركة الانزلاقية (هندسياً يرسم الخط ab_1 عمودياً على الخط المحوري الواصل بين C ومركز الذراع القوسي). ونرسم أخيراً الخط Cb_2 عمودي على الخط CB انطلاقاً من النقطة C (وبدون تحديد طوله) حتى يتلاقى مع ab_1 في النقطة b. الرسم الدقيق للمثلث Cab يعرف السرجهتين $\boldsymbol{v}_C$ و $\boldsymbol{v}_{CC'}$، قياساً بالمسطرة. وتعتبر طريقة الرسم والقياس غير عملية في بعض الحالات. لذلك تُحل المسألة نفسها باستخدام قانون الجيب. فللمثلث الناتج Cab، نكتب

$$\frac{v_C}{\sin\alpha} = \frac{v_{C'}}{\sin\beta} = \frac{v_{CC'}}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad 3$$

ومن **رسم** 3 يتبين لنا أن $\alpha = \arc\sin(1.52/1.7) = 63.4^o$، $\beta = \arc\sin(0.49/0.9) = 33^o$. نحسب من المعادلتين 1 و 3 السرعتين

$v_C = 5.6$ [m/s] & $v_{CC'} = 6.2$ [m/s] 4

التسارع الزاوي للذراع BC

$$\omega_B = \frac{v_C}{BC} = \frac{5.6}{0.9} \;\Rightarrow\; \omega_B = 6.2 \text{ [rad./s]} \qquad 5$$

لإيجاد مركبات تسارع المنزلق C نستخدم المعادلتين التاليتين

$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_{C'} + \boldsymbol{a}_{CC'} + \boldsymbol{a}_{cor}$ 6

$$\mathbf{a}_{Cn} + \mathbf{a}_{Ct} = \mathbf{a}_{C'n} + \mathbf{a}_{CC'n} + \mathbf{a}_{CC't} + \mathbf{a}_{cor} \qquad 7$$

حيث جميع المركبات محددة على **الرسم** 3. فنحللها جميعاً مقداراً و/أو اتجاهاً. نبدأ من المركبة العمودية

$$a_{Cn} = BC \times \omega_B^2 = 0.9 \times 6.2^2 \Rightarrow a_{Cn} = 34.8\ [m/s^2] \qquad 8$$

اتجاهها نحو الدِّعامة B وخط عملها الذراع CB. بينما المركبة المماسية

$$a_{Ct} = BC \times \varepsilon_B \qquad 9$$

خط عملها عمودي على الذراع CB، نفترضه مع دوران الذراع. المركبة

$$a_{C'} = a_{C'n} = AC \times \omega^2 = 1.7 \times 2^2 \Rightarrow a_{C'n} = 6.8\ [m/s^2] \qquad 10$$

واتجاهها نحو الدِّعامة A وخط عملها (الخط) CA. المركبتان الانزلاقيتان العمودية والمماسية

$$a_{CC'n} = \frac{v_{CC'}^2}{R} = \frac{6.2^2}{192} \Rightarrow a_{CC'n} = 20\ [m/s^2] \qquad 11$$

$$a_{CC't} = R\ \varepsilon \Rightarrow a_{CC't} = 1.92\ \varepsilon \qquad 12$$

وبالعادة يكون اتجاه مركبة التسارع الانزلاقية العمودية نحو مركز الذراع القوسي بينما تكون المركبة المماسية عموديةً على خط المحور، نفترضها لليمين. وأخيراً نحسب التسارع الكوريوليسي

$$a_{cor} = 2\ \omega \times v_r = 2 \times 2 \times 6.2 \Rightarrow a_{cor} = 24.8\ [m/s^2] \qquad 13$$

واتجاه التسارع الكوريوليسي عمودي على المستوى المكون من المتجهين أولاً w ثم $\boldsymbol{v}_r$ وِفقاً لقاعدة اليد اليمنى. ولأننا نرغب بمعرفة التسارع الزاوي ε_B للذراع BC والتسارع الانزلاقي المماسي $a_{CC't}$ فإن إيجاد قيمتيهما يتطلب إسقاط المعادلة 7 مرتين: أولاً على الخط CO ومن ثم على الذراع BC

$$\text{Eq 7 : CO} \Rightarrow a_{Cn} \cos\beta - a_{Ct} \sin\beta = a_{C'n} \cos\alpha + a_{CC'n} - a_{cor}$$

وباستبدال المجاهيل بقيمها كما ورد أعلاه نجد أن

$$34.8 \cos 33 - 0.9\ \varepsilon_B \times \sin 33 = 6.8 \cos 63.4 + 20 - 24.8$$

$$\varepsilon_B = 63.6\ [rad./s^2] \quad \& \quad e_B = -63.6\ \boldsymbol{k}\ [rad./s^2] \qquad 14$$

$$\text{Eq 7 : CB} \Rightarrow a_{Cn} = -a_{C'n} \cos[180 - (\alpha+\beta)] + a_{CC't} \sin\beta + a_{CC'n} \cos\beta - a_{cor} \cos\beta$$

وباستبدال المجاهيل بقيمها كما ورد أعلاه نجد أن

$$34.8 = -6.8 \cos[180 - (63.4+33)] + a_{CC't} \sin 33 + 20 \cos 33 - 24.8 \cos 33$$

لنجد أن التسارع المماسي للذراع القوسي

$$a_{CC't} = 72.7\ [m/s^2]$$

ومنها نجد التسارع الزاوي للذراع القوسي

$$a_{CC't} = 1.92 \times \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 37.86\ [rad./s^2] \quad \& \quad e = -37.86\ \boldsymbol{k}\ [rad./s^2] \qquad 15$$

الباب الثالث

هنري كيسنجر:
.... لقد كان لنا ثورتنا النيوتنية، أما هم(الشرقيون) فلم يكن لهم ذلك.
إدوارد سعيد، **الإستشراق**، بيروت: مؤسسة الأبحاث العربية، 1995، ص 77.

قوانين الديناميكا LAWS OF DYNAMICS

1.3 المفاهيم الأساسية

الديناميكا هي قسم الميكانيكا النظرية الذي يبحث في قوانين حركة الأجسام تحت تأثير القوى. لقد عرفت القوة في الاستاتيكا بأنها ثابتةٌ في المقدار والاتجاه، وهي بالتالي مقدار التأثير الميكانيكي بين الأجسام المادية. أما في الكَيْنَمَاتِيكا فلم تُذكر القوة أبداً، إذ درست حركة الجسم من وجهة النظر الهندسية البحتة. غير أن قوىً متغيرةً، مقداراً و/ أو اتجاهاً تؤثر على الأجسام المتحركة، علاوةً على القوى الثابتة. وعلى هذا الأساس يمكن أن تكون القوى المؤثرة وردود الأفعال بين الأجسام المتحركة متغيرة.

وكما تبين التجارب العلمية، فقد تعتمد القوة على الزمن أو على موضع الجسم أو على سرجهته، أو على متغيراتٍ أخرى لا مجال لذكرها الآن، وقد تعتمد على اثنين من هذه المتغيرات أو كلها. ولهذا فقوة نيوتن للجاذبية تعتمد على موضع (ارتفاع) الجسم بالنسبة لسطح الأرض، بينما تعتمد قوة مقاومة الوسط على سرعة حركة الجسم فيه. وبوجهٍ عام، فالديناميكا علمٌ يأخذ بعين الاعتبار تأثير القوى الفعالة، وقوى القصور لنفس الأجسام المتحركة على حركتها.

إن قوة القصور لجسمٍ ما، هو خاصية هذا الجسم لتغيير حركته إلى أسرع أو أبطأ تحت تأثير القوى المؤثرة عليه. فعلى سبيل المثال، إذا كان التغير في سرعة أحد الأجسام أكثر بطءً مما في جسمٍ آخر تحت تأثير قوتين متكافئتين، فإن الجسم الأول يكون أكثر قصوراً والعكس صحيح. وتعتمد درجة قصور الجسم على كمية ما يحتويه هذا الجسم من مادة. ويطلق على الكمية التي يعرف بها ما يحتويه الجسم من مادة وتحدد مقدار قوة قصوره بكتلة الجسم. ولذلك تعتبر الكتلة دائماً كميةً موجبةً في الميكانيكا.

من جهةٍ أخرى، فإن حركة الجسم لا تعتمد على كتلته الكلية والقوى المؤثرة عليه فقط، وإنما على الأبعاد الهندسية للجسم نفسه، وعلى مواضع الجسيمات المكونة له، أي على توزيع الجسيمات وكتلها. وحتى نستطيع أن نغُضّ النظر في بداية دراسة الديناميكا عن تأثير أبعاد الجسم أو حتى توزيع جسيماته، نورد مفهوماً جديداً هو الجسيم المادي أو الجسيم particle. ويعرف الجسيم بأنه عنصرٌ طبيعي ذو كتلة، أبعاده متناهيةَ الصغر ويمكن اهمالها عند دراسة حركته. وتصنف حركة الجسيم تبعاً لذلك، كإحدى الحالتين: الحركة الانتقالية المستقيمة rectilinear translation motion والحركة المنحنية curvilinear motion. وبناءً عليه، نعتبر كوكباً ما أثناء حركته حول الشمس، أو قذيفة مدفعٍ عند تعيين مداها، أو بروتوناً أثناء حركته في مسارعٍ دائري جسيماً مادياً.

ومن الطبيعي أن تسبق دراسة حركة **الجسيم المادي** دراسة حركة **نظام الجسيمات المادية** أو **النظام** System of Particles، أوحتى **الجسم الجاسئ** Rigid Body. ولهذا يُقسم منهج الديناميكا عادةً إلى **ديناميكا الجسيم وديناميكا النظام والجسم الجاسئ**. كما تُقسم مسائل الديناميكا إلى المسألتين التاليتين: الأولى: تعيين القوة المؤثرة على الجسيم المتحرك (النظام) عند معرفة حركة هذا الجسيم، والثانية تعيين قانون حركة الجسيم (النظام) عند معرفة القوة المؤثرة عليه. هذا وتعتبر الأخيرة المسألة الأساسية في الديناميكا.

2.3 قوانين الديناميكا الأساسية

قانون نيوتن الأول ، حركة القصور Inertial Motion

إنها لملاحظةٌ مألوفةٌ أن نجعل جسماً ساكناً فوق سطحٍ مستوٍ يتحرك نتيجةَ دفعه أو سحبه أو حتى دسره (دفعه بشدةٍ) ميكانيكياً. فعند زوال التأثير الميكانيكي المسبب للحركة يسكن الجسم. هذه الحقيقة حَدَت **بأرسطو**، ومن جاء بعده من العلماء والفلاسفة الطبيعيين، أن يفترض بأن الحركة المنتظمة السرعة (الأفقية والمستقيمة) تتطلب دسراً متواتراً؛ أي قوةً ثابتةً مؤثرةً على الجسم. وكما ورد في **الباب الأول**، اعتقد **أرسطو** أيضاً أن سرعة الجسم الساقط تتناسب طردياً مع صفته الطبيعية (وزنه)، بما يعني أن الجسم الثقيل أسرع في السقوط من الجسم الأخف وزناً. وكان **غاليليو**، في بواكير القرن السابع عشر أول من رأى الخطأ في هذا التفسير. إذ أدرك أنَّ هذه النظرة المبنية على الإدراك العام لا العلمي نظريةٌ خاطئة. وبادر وقد عدِم الوسيلة لأن يوجد فراغاً، إلى دحرجة كراتٍ ذوات أحجامٍ مختلفة على سطوحٍ مائلة. هذه التجارب بينت أن الإنحدار على السطوح المائلة يعطي الكرات المختلفة تسارعاً واحداً. وتبعاً لذلك، استنتج بالمقارنة أن الأجسام جميعها تتسارع بمعدلٍ ثابت تقريبا عند سقوطها الحر. هذه الجدليات انبثقت عن مفاهيم نوتْنيَّة، لم تكن معروفة لدى **غاليليو**، فكان عليه أن يشق طريقه بنفسه.

وكان **أرسطو** قد عرف نصف مفهوم القصور - يميل الجسم الساكن للبقاء ساكناً. إذ كان هذا كافياً للتعامل مع أرضٍ غير متحركة. وباقتناعه بكون كوبرنيكس وحركة الأرض، تحسس **غاليليو** طريقه بحثاً عن النصف الثاني لمفهوم القصور - يميل الجسم المتحرك للبقاء متحركاً. فاستحدث رحلةً بحريةً شيقةً لسفينةٍ تتحرك بسرعةٍ ثابتةٍ وبخطٍ مستقيم وذلك بعيد استقرارها في البحر بلا حراك. وفي معرض مقارناته لفعاليات المبحرين أثناء الرحلة مع مثيلاتها عند سكون السفينة تأكد له تكافؤ الحالتين بالتمام. إذ لا يستطيع أياً كان التأكد من الحالة التي هو فيها، أهي السكون أم الحركة بسرعةٍ منتظمة ومستقيمة. إلا أن **غاليليو** أخفق عند استخلاصه النتائج في

تعميم مبدأ القصور. فبقي أسير افتراضٍ قَرْوَسَطِّي خاطئ يستند إلى أن مفعول الأجسام ينجم عن نزوعٍ داخليٍ لا عن مجرد الكتلة وعن تطبيق القوة، كما لم يستطع تحرير نفسه فكرياً من أغلال الجاذبية الأرضية. ومن هنا كان (قانونه) الخاص بالأجسام الساقطة، والذي طالما دُعي قانون الميكانيكا الأول، لهو قانونٌ يشوبه الخطأ وأخطأه الصواب.

أمَّا **نيوتن** فقد أفلح دون تردد في تعميم مبدأ غاليليو في القصور إلى ما نهاية، وأعلنه قانون الميكانيكا الأول الذي ينص: **يظل كل جسيمٍ على حالته من السكون، أو من الحركة المنتظمة بخطٍ مستقيم ، ما لم تُؤثر عليه قوةٌ تُغَيِّر من حالته هذه.** أو بتعابير رياضيةٍ ولغويةٍ: **إذا كانت القوة صفراً $F = 0$، فإن التسارع يكون صفراً $a = 0$، لينتج أن الجسيم يتحرك بسرجهةٍ ثابتةٍ $v = \text{const.}$. أي أن قوةً صفرية تستلزم تسارعاً صفرياً** (أو **بصورةٍ مكافئة سرجهةً ثابتـــةً**).

لقد شكل هذا الفهم الدقيق لمعنى القصور لـ**نيوتن** اللّبِنَةَ الأولى في صرح الجاذبية. إذ استند في ذلك إلى الحقيقة الواضحة: إذا كانت حركة القمر والكواكب الطبيعية، في حالة انعدام القوة هي حركةٌ في خطٍ مستقيم، فإن كون حركة هذه الأجرام مداريةً فعلاً ومتسارعةً يقتضي تفسيراً معيناً. إذ ينبغي أن تؤثر قوةً ما لكي تحرف الجرم السماوي عن مساره المستقيم إلى مساره المنحني حول الشمس. ولقد وجد **نيوتن** أن هذه القوة متناسبةٌ عكسياً مع مربع المسافة بين الكوكب المعين والشمس الجاذبة له- قانون الجاذبية العام universal law of gravitation.

كذلك يمكن تطبيق قانون نيوتن الأول على الأجسام الأرضية. فإذا كان مجموع قوتين أو اكثر مؤثرتين على جسم صفراً، تحرك الجسم بسرجهةٍ ثابتةٍ. والعكس بالعكس: إذا لوحظ أن جسماً ما يتحرك بدون تسارع، وجب أن تكون محصلة القوى المؤثرة عليه صفراً. بيد أن هذا القانون يكون ذا دلالة خاصة عندما يطبق على **جسم معزول** isolated body، عندها يستحوذ هذا القانون على معنىً بدون تعريف القوة. إن غياب (تأثير) القوة معناه الانعزال. وعلى هذا يمكن تعريف القانون الأول لنيوتن: **يتحرك الجسم المعزول الحر من التأثيرات الخارجية بسرجهة ثابتة.**

وبما أن خبرتنا المألوفة بالحركة تُكَيِّفُنا لأن نفكر بطريقةٍ أرسطويَّة أكثر من نيُوتَنيَّة، فإن تطبيق قانون نيوتن الأول على أوضاعٍ عادية قد يكون مربكاً، بالرغم من بساطة هذا القانون المتناهية. مثلاً، تحتم علينا نزعتنا الطبيعية الرد بالإيجاب على السؤال: هل تؤثر أيَّةُ قوى على غواصٍ هوائي أثناء سقوطه بالمظلة بسرعة ثابتة؟ ومن الطبيعي أن يكون جوابنا الايجابي هذا ، مستنداً إلى قوة الجاذبية المؤثرة عليه. لكن في الحقيقة ستكون محصلة القوى المؤثرة على الغواص الهوائي صفراً، فقوة احتكاك الهواء تبطل مفعول قوة الجاذبية.

أُطُرِ الإسْنَاد Frames of Reference

تستند الميكانيكا بشكلٍ خاص والفيزياء بشكلٍ عام إلى بياناتٍ حول الموضع في المكان . وتُحَدَّدُ عادة نقطةٌ في المكان بواسطة إحداثيات. فلتعيين موضع نقطةٍ ما على خطٍ مستقيم ، يكفي إحداثيٌّ واحد، بينما يلزم إحداثيان إثنان لتحديد نقطة في مستوى، وثلاثة إحداثياتٍ لتحديد نقطةٍ في مكانٍ ثلاثي الأبعاد. وكل نظامٍ إحداثيّ ينطوي على نُقطة معينة، هي نقطة الأصل، واتجاهاتٍ معينةٍ أو محاور وتعليمات، تحدد تموضع النقاط في المكان نسبة إلى نقطة الأصل والى المحاور. وليس ثَمَّةَ من نهايةٍ لعدد الأنظمة الإحداثية، فهناك العديد من الأنظمة المحددة الذي يكون مناسباً لمعضلاتٍ خاصة، إلا أن هناك أنظمةً قليلةً نسبياً تُستخدم على نطاق واسع. ومن بين الأنظمة الأكثر شيوعاً: الديكارتية والقطبية والأسطوانية والكروية (الكُرِّية).

وعلى العموم، تشكل نقطةُ أصلٍ مع فئة محاور ما يدعى بإطار إسناد. وإطار الإسناد هو فكرة أشمل من نظام الإحداثيات. فمن الممكن ضمن إطار إسنادٍ واحد وجود عددٍ متنوعٍ من أنظمة الإحداثيات. وفي التطبيقات الميكانيكية يتم اختيار أطر الإسناد على الأغلب لكي ترتبط ارتباطا وثيقاً بالأشياء المادية. وعليه يمكن اعتبار أي جسمٍ جاسيء أو مجموعة من الأجسام الجاسئة، مثل عربة تحمل بندولاً بسيطاً أو حاملةُ طائراتٍ أو مركز الأرض أو مركز الشمس أو مركز المجرة التي ننتمي إليها مركزاً لإطارٍ إسناد. ولذلك يعرف إطار الإسناد بإنه زاوية النظر التي يرى المشاهدُ العالمَ من خلالها.

وحتى يكتسب القانون الأول لنيوتن معناه، ينبغي أن يرتبط بإطار إسنادٍ معين، أو على الأغلب إلى فئةٍ معينةٍ من أطر الإسناد. وتسمى أطر الإسناد التي يتحقق بالنسبة لها قانون القصور بأطر الإسناد القصورية inertial frames of reference. وهذه الأطر الإسنادية أطرٌ مكانيةٌ بحتةٌ، ثابتةٌ ومستقرةٌ في مكانها، وفي أفضل الحالات تتحرك بسرجهةٍ ثابتةٍ ولا تعتمد على الزمن - الزمن مطلق. والإطار القصوري بطبيعتهِ ومركزه بالتحديد يكون معزولاً عن التأثيرات الخارجية. ولذلك، يتطابق مركز هذا الإطار مع مركز الكون.

هذه الحقيقة، رغم كل الدقة في حساب حركة الأجسام، أضحت غير عملية. فحركة سلحفاةٍ تزحف لجُحْرِها أو حركة قذيفةٍ صاروخيةٍ عابرةٍ للقارات تنطلق لهدفها أو حتى حركة مركبةٍ فضائيةٍ تنطلق في مسارٍ زائدي حول الأرض لا يتم بهذا التعقيد. إذ تستند دراسة الحركتين الأوليتين مباشرةَ إلى موقعٍ أو نقطة انطلاقهما كنقطة أصلٍ لإحداثياتٍ تعبر عن إطار إسنادٍ معين يكافئ القصوري. وهذا الإطار لا يكون صالحاً لدراسة الحركة الثالثة، إذ يكون عندها مركز الأرض الأفضل والأدق كنقطة أصلٍ لإحداثياتٍ تعبر عن إطار قصوري. ولذلك يُعَرَّفُ إطار الإسناد القصوري بأنه ذاك الإطار الذي يرتبط ارتباطاً وثيقاً بجسمٍ غير متسارع، إذا تأثر فقط بقوة جاذبية، بدلاً من عدم تأثره بأيةِ قوة، أو على وجه التقريب جسمٌ تسارعه ذو رتبةٍ أدنى من تسارع الجسم قيد الدراسة. ولذلك ؛ فموقع نقطةٍ على سطح الأرض كنقطة بداية حركة سيارة أو حتى طائرةٍ يكفي كإطارٍ قصوري لدراسة الحركتين، بينما لا يكفي ذلك لدراسة حركة مركبةٍ فضائية تدور حول الأرض أو تنطلق نحو القمر. عندها يكون مركز الأرض الأمثل لدراسة حركة المركبة الفضائية، لكن ليس للمدى الذي يمكننا من دراسة حركة نيزكٍ يغوص في أعماق الكون. لحظتها يكون مركز الشمس هو مركز الإطار القصوري. وبالطبع، فإن هذا الظرف بالضبط هو الذي أدّى **بكوبرنيكس** إلى الثورة العلمية، التي حدّدت الشمس كمركز ثابتٍ للنظام الشمسي. ونحن نعلم الآن أن الشمس ليست ثابتة تماماً، إذ تدور حول المجرة بتسارع ضئيلٍ جداً جداً.

قانون نيوتن الثاني، كتلة القصور Inertial Mass

سرعة التغير في زَخَمِ الجسيم تساوي في المقدار والاتجاه القوةَ التي تؤثر عليه. لقد انطلق **نيوتن** من المعادلة

$$\mathbf{F}\,(t_2 - t_1) = m\,(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) \qquad 1.3$$

والتي تبين العلاقة ، بين الدفع impulse ، رمزه $\mathbf{P}$ ، $\mathbf{P} = \mathbf{F}\,(t_2 - t_1)$ ، والتغير في الزَّخَم change of momentum ، رمزه $\Delta\mathbf{K}$ ، $\Delta\mathbf{K} = m\,(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$. وتعتبر المعادلة 1.3 أقرب ما يكون إلى الشكل الذي عبر به **نيوتن** عن قانونه الثاني[1]. ويُسَمَّى ثابتُ التناسب في تلك المعادلة m ، بكتلة القصور أو ببساطه كتلة الجسيم ، $\boldsymbol{v}_1$ و$\boldsymbol{v}_2$ سرجهتي الجسيم في اللحظتين المتتاليتين t_1 و t_2 . أما **أويلر** Euler فقد قام بقسمة طرفي المعادلة 1.3على الفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$ فحصل على المتساوية

$$\mathbf{F} = m\,\frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{t_2 - t_1} = m\,\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

وباستخدام صيغة النهاية، فإن

$$\mathbf{F} = m \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

أو بشكل آخر

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \qquad 2.3$$

حيث أن تسارع الجسيم $\mathbf{a}$ يساوي المشتقة الأولى لسرجهته $\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. هذه المعادلة 2.3 تعرف قانون نيوتن الثاني بصيغة أخرى: **حاصل ضرب كتلة الجسيم وتسارعه يساوي القوةُ (المتجه الرئيسي للقوى) المؤثرة على الجسيم في المقدار والاتجاه.** كما يمكن الحصول على نفس النتيجة بدون الحصول على محصلة القوى المؤثرة على الجسيم. وتبعاً لذلك، إذا أثرت عدة قوىً على جسيمٍ واحد فإن كل قوة من هذه القوى تُكسِب الجسيم التسارع الذي تكسبه إيّاه فيما لو أثرت تلك القوة لوحدها.

وكي نتدبر مدلول كتلة القصور نتخيل رائدي فضاءٍ يحومان بحرية داخل قَمْرَة سفينتهما الفضائية في حالة انعدام الوزن. فهما يعومان بعيداً عن بعضهما البعض بطريقة معينة لحظة انفصالهما. ويمكن ملاحظة أن رائداً نحيلاً انطلق بسرعة أكبر من آخر بديناً. إذ نعزو ذلك إلى كتلته الأصغر، وبخاصةٍ كتلة قصوره الأصغر. كما أن كرةً مقذوفةً من رائدِ فضاءِ منفرد وعائم في وسط القمرة ستتحرك بسرعةٍ هائلةٍ نسبةً إلى قاذفها المرتد في الاتجاه

[1] عبارة **نيوتن**: يتناسب التغير في الحركة مع القوة المحركة المؤثرة، وتحدث بنفس اتجاه نفس الخط التي تؤثر فيه تلك القوة. هذه هي ترجمة عبارة نيوتن الأصلية بالاتينية. وهو يستخدم الحركة بدلاً من الزَّخَم والقوة بدلاً من الدفع، لذا يتوجب نقل عبارته تلك لتنطق بالمصطلح الحديث على الصورة التالية: **يتناسب التغير في الزخم مع الدفع المؤثر ويكون اتجاهه موازياً للدفع**. انظر: **فورد و .ك**. الفيزياء الكلاسيكية والحديثة، مجلد 1 من قائمة المراجع العربية. ص 349.

المضاد بتؤده. وإذا انطلقت الكرة أسرع من رائد الفضاء بأربعمئة مرة، فما مردُّ ذلك إلا لإن كتلتها هي جزءٌ واحدٌ من أربعمئة من كتلة رائد الفضاء. ولذلك فمقاومتها للشروع بالحركة، إذن، هي أقل بأربعمئة مرة.

نلاحظ من المعادلة الاتجاهية 2.3 أن التناسب بين القوة والتسارع اتجاهيّ. فالتسارع يكون في اتجاه القوة (محصلة القوى) المؤثرة على الجسيم قيد الدراسة، بغَضٍّ النظر عن السرجهة واتجاهها. هذا التناسب لا يستلزم أيَّةَ صلَةٍ سببية بين القوة والتسارع، إذ يكون طبيعياً إلى حدٍ ما أن نفكر بالقوة كأنها السبب، والتسارع كأنه النتيجة. كذلك يكون من الصحيح منطقياً - سواءً بسواء - أن نقول أن التسارع يسبب القوة، بل إنه لمن الأسهل أحيانا أن نفكر بهذه الطريقة. فبِوسعنا القول، مثلاً ، أن تسارع سيارة إلى الأمام (يجعلنا) نشعر بقوةٍ إضافيةٍ آتيةٍ من خلف المقعد. أياً كان الأمر، فإن الصيغة 2.3 بوصفها أحد نواميس الطبيعة، تنص فقط على أن القوة والتسارع يردان معاً بطريقةٍ معينة.

الوزن والكتلة

تؤثر على كل الأجسام الواقعة قرب سطح الأرض قوة الجاذبية الأرضية $\mathbf{F}_{grav}$، المساوية عددياً لوزن الجسم. وتؤثر هذه القوة سواءً أكان الجسم متحركاً أم ساكناً. لكنها تقاس على الوجه الأنسب عندما يكون الجسم ساكناً. وقد بَيَّنَت التجربة أن كلَّ الأجسام عند سقوطها على الأرض من ارتفاعٍ قليل، وباهمال مقاومة الهواء لها تسارعٌ واحد هو تسارع الجاذبية الأرضية **g**. وبما أن قياس الوزن هو قياسٌ ساكن، فإنه يُزَوِّدُنا بمعلوماتٍ هامةٍ عن قوةٍ طبيعيةٍ أساسيةٍ ومستقلةٍ عن قوانين الحركة.

وتسفر دراسات قوة الجاذبية عن الحقائق التالية: بالقرب من سطح الأرض يكون وزن الجسم - لدرجة جيدة من التقريب - مستقلاً عن موضعه. وتكون قوة الجاذبية المؤثرة على الجسم مستقلةً عن نوع أو حالة حركته. والأهم من هذا وذاك، أن الوزن يتناسب مع الكتلة تناسباً كونياً لكل المواد وسائر الأحجام.

ونظراً للتناسب الملاحظ بين الوزن والكتلة (كتلة القصور)، فغالباً ما يكون هناك خلطٌ بين هذين المفهومين. فكتلة القصور التي تُعرَّف في قانون نيوتن الثاني بثابتِ التناسب بين القوة والتسارع، هي مقياس للمقاومة المبذولة ضد التغيير في حركة جسمٍ خاضعٍ لنفس القوة . من ناحية أخرى فإن الوزن هو - على وجه التحديد - مقياس لشدة استجابة الجسم المتحرك لقوة الجاذبية. وقد ظلَّ تناسبهما (الوزن والكتلة) الطردي، الذي اكتشفه **نيوتن** ، لغزاً غامضاً لأكثر من قرنين من الزمن حتى بداية القرن العشرين. هذا ويمكن كتابة التناسب التجريبي بين قوة الجاذبية $\mathbf{F}_{grav}$ وكلتة القصور m على الصورة

$$\mathbf{F}_{grav} = m\,\mathbf{g}$$

حيث **g** ثابت التناسب الجديد. فإذا اختير محور z ، مع متَّجِه الوَحْدَة $\boldsymbol{k}$، لنظامٍ إحداثيٍ ديكارتي، بحيث يُشير إلى الأعلى، كانت المعادلة الاتجاهية

$$\mathbf{F}_{grav} = -\,m\,g\,\boldsymbol{k}$$

ومع أن الثابت g يكون دائماً ثابتاً في الموضع الواحد على سطح الأرض، ومستقلاً عن حجم وطبيعة المادة الموزونة، إلا أنَّه يتفاوت قليلاً من موضعٍ لآخر، وذلك بالاعتماد على (زاوية) خط العرض[2]. وإن مقارنة قانون القوة هذا مع قانون نيوتن الثاني، لَتُبَيِّن أن g، ينبغي أن يكون لها نفس البعد كالتسارع. وإذا كانت قوة الجاذبية هي القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم قيد الدراسة، فإن تسارعه يرتبط حسب قانون نيوتن الثاني

$$\mathbf{F}_{grav} = m\,\mathbf{a}$$

وبربط المعادلتين الإتجاهيتين الأخيرتين، ينتج للتَّو أن

$$\mathbf{a} = -g\,\boldsymbol{k} \quad \& \quad a = g$$

وهذا تسارعٌ ثابتٌ متَّجِهٌ للأسفل، مقداره 9.8 متر/ثانية تربيع ل(زاوية) خط العرض $\varphi = 31^{o}45'$. ولذلك، يدعى g عادةً بتسارع الجاذبية acceleration of gravity [2].

قانون نيوتن الثالث Newton's Third Law

يؤثر الجسيمان المتفاعلان كل منهما على الآخر بقوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه. ورياضياً نرمز لذلك بالمعادلة

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{ji} \qquad 3.3$$

واصطلاحاً، سنجعل الحرف السفلي الأول ***i*** يدل على الجسيم المتأثر بالقوة، والحرف السفلي الثاني ***j*** يدل على الجسيم المؤثر بالقوة. وبصورةٍ أكثر تعميماً، يمكن صياغة القانون كالأتي: **ترد كل قوى الطبيعة في أزواج متساويةٍ ومتضادة**. يلاحظ أن هذا القانون يحتاج لتطبيقه إلى جسيمين متفاعلين على الأقل، على عكس القانونين الأول والثاني اللذين يمكن صياغتهما بدلالة أجسامٍ أو جسيماتٍ منفردة.

هذه الصياغة لقانون نيوتن الثالث لا تختلف كثيراً عن صياغة **نيوتن** نفسه للقانون: **لكل فعل يوجد رد فعل مساوٍ ومضاد**؛ أو **إن الفعلين المتبادلين بين الجسيمين يتساويان ويتضادان**. وإن كان استخدامه لكلمة فعلٍ بدلاً من كلمة قوة غير واضحَ المعالم[3].

---

[2] تتغير قيمة تسارع الجاذبية الأرضية بدلالة خط العرض حسب الصيغة الدولية للجاذبية international gravity formula

$$g = 9.781\,(1 + 0.53\times10^{-3}\sin^2\phi - 5.9\times10^{-6}\sin^2 2\phi)$$

حيث أن $g_o = 9.781\ [m/s^2]$ تسارع الجاذبية لمستوى سطح البحر عند خطِّ الاستواء. وبالتالي فتسارع الجاذبية في القدس، خط العرض $\phi = 31^{o}45'$ يساوي $g = 9.795\ [m/s^2]$. انظر **الباب السابع** والبند 2.7 بالتحديد.

[3] ربما قصد بذلك شمُول مفهوم **فعل** مفهومي **القوة** و**تَغَيُّر الزَّخَم**، ولربما فقط لسببٍ لغويٍ مفاده أن كلمة **فعل** action، لها ضدٌ مناسب، **رد فعل** reaction، في حين أن **قوة** ليس لها مثل ذلك. أنظر: **فورد و. ك** . الفيزياء الكلاسيكية والحديثة، مجلد 1 من قائمة المراجع العربية. ص 349.

ومن أهم مظاهر قانون نيوتن الثالث التي تستوجب الفهم، هو أنه قانون قوة وليس قانون حركةٍ بصورةٍ مباشرة. فهو لا يفصح بأيّ شيءٍ، لا عن الحركة ولا عن القوى المؤثرة على الجسم المتحرك أو الساكن والتي تنشأ عن أي شيءٍ آخر غير الجسم الثاني، ولا عن نوع القوة المؤثرة بين الجسمين المتفاعلين. فعلى سبيل المثال يَنُصُّ القانون: إذا تأثر جسمٌ إلى أسفل بقوةِ جاذبية الأرض، مقدارها F، إنجذبت الأرض من الجسم إلى الأعلى بمحصلةِ قوةٍ مقدارها أيضاً F، بِغَضٍّ النظر عن أية قوى أخرى قد تؤثر على النظام المكون من الجسم والأرض، وبِغَضٍّ النظر عما إذا كان الجسم متحركاً أو يستقر على منضدة. وتتحدد حركة كل من الأرض والجسم بالقوة (محصلة القوى) الكلية المؤثرة على كل منهما - قانون نيوتن الثاني. وقوة جاذبية الأرض هي واحدةٌ من بين مجموعة القوى الممكنة المؤثرة على الجسم. كما أن قوة جذب الجسم للأرض هي مجرد قوةٍ واحدةٍ من بين مجموعة القوى المؤثرة على الأرض. وبموجب قانون نيوتن الثالث تكون هاتان القوتان متساويتين ومتضادتين، أي أنهما زوجٌ متناظر.

لذلك يساعدنا قانون نيوتن الثالث على الاستنتاج أن قوة الجاذبية متبادلة. فالأرض لا تشدّ الكواكب والقمر بقوة جاذبيتها فحسب، بل إن تلك الأجرام تفعل الشيء ذاته فتتعرض الأرض لقوىً جاذبيتها (الأجرام). وإن هذا التبادل في الجذب الناتج عن قوة الجاذبية ليؤدي إلى تعقيداتٍ في حركات الكواكب. فالمشتري مثلاً، بضخامة كتلته يشوش على مدارات الكوكب المجاور له، أي زحل.

وبالطبع فإن سقوط الأجسام على الأرض يخضع أيضاً لقانون رد الفعل، بالرغم من عدم ظهور هاتين القوتين في الحال. إن التفاحة تسقط على الأرض لان هذه الأخيرة تجذبها إليها، ولكن التفاحة تجذب الأرض اليها بنفس القوة تماماً. وبعبارةٍ أدق، فإن كلاً من التفاحة والأرض، تسقطان على بعضهما البعض، ولكن سرعة سقوط التفاحة على الأرض تختلف عن سرعة سقوط الأرض على التفاحة. فالقوى المتساوية والمتضادة للجذب المتبادل بين الأرض والتفاحة، تعطي التفاحة تسارعاً قدره 9.8 متر لكل ثانية تربيع بينما تعطي الأرض تسارعاً يقل عن تسارع التفاحة بنسبة كتلة الأرض إلى كتلة التفاحة. وحيث أن كتلة الأرض أكبر من كتلة التفاحة بعددٍ لا متناهٍ من المرات فإن هذا يجعل الأرض لا تنتقل من مكانها إلا بمقدارٍ ضئيلٍ جدا يمكن اعتباره مساوياً للصفر. ولهذا السبب نقول أن التفاحة تسقط على الأرض بدلاً من قولنا بأن كلاً من التفاحة والأرض تسقطان على بعضهما البعض.

3.3 **وَحَدَات القياس والأبعاد** Units and Dimensions

تقاس الكميات الفيزيائية نوعياً بوَحَدَاتٍ بُعدِيةٍ وكمياً بوَحَدَاتٍ عددية. إن استخدام قانون نيوتن الثاني يتطلب استعمال مجموعةٍ متجانسةٍ من الوَحَدَات، حيث يبين القانون المذكور العلاقة بين الوَحَدَات المكونة له وهي القوة والكتلة والتسارع. إن الوَحَدَات المستخدمة لأي كميتين من الكميات الثلاث الوارد ذكرها تحدد وَحْدَة الكمية الثالثة اشتقاقاً من القانون نفسه. لقد اصْطُلِح على أن وَحْدَتَي الطول [L] والزمن [T] تكونان أساسيتين، بما يعني أن وَحْدَة التسارع تصبح مميزةٌ $[LT^2]$. ولذلك علينا اختيار أيٍ من الكميتين المتبقيتين، الكتلة، أو القوة ستكون أساسية . وعليه نميز المجموعتين التاليتين:

1- **مجموعة الوَحَدَات المُطْلَقَة** Absolute Systems of Units

تعتبر فيها وَحَدَات الطول [L] والزمن [T] والكتلة [M] أساسية، أما القوة فَتُشْتَقُّ من هذه الوَحَدَات انطلاقاً من قانون نيوتن الثاني. وتعرف تبعاً لذلك، **وَحْدَة القوة بالقوة اللآزمة لاكساب وَحْدَة الكتلة تسارعاً مقداره وَحْدَة تسارع.** وتعتبر مجموعة **النظام الدُّوَلِي** للوحدات *SI* مجموعةَ وَحَدَات مُطلقةٍ حيث يُقاسُ التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع أما الكتلة فتقاس بالكيلوغرامات. وعلى هذا الأساس فإن **وَحْدَة القوة**، المشتقة من الوحدتين الباقيتين ستعرف **بالقوة التي تُكْسِب كتلةً مقدارها كيلوغرام واحد تسارعاً مقداره مترٌ واحد لكل ثانية تربيع.** وتعرف هذه القوة **بالنيوتن** $[kg.m/s^2]$ 1[N]=1. كما يَنْتَمي نظام **س غ ث** *CGS* [4]، ووَحَدَاته السنتمتر للطول والغرام للكتلة والثانية للزمن إلى مجموعة الوحَدَات المطلقة تماماً مثلما هو الحال بالنسبة **للنظام الدُّوَلِي** للوحَدات *SI*. وتقاس القوة عندئذ **بالدّاين** [dyne]، الذي يعرف **بــالقوة التي تَكْسَبها كتلة الغرام الواحد عند التأثير عليها بتسارع مقداره سنتمترٌ واحد لكل ثانية تربيع.**

2- **مجموعة الوَحَدَات التثاقلية** Gravitational Systems of Units

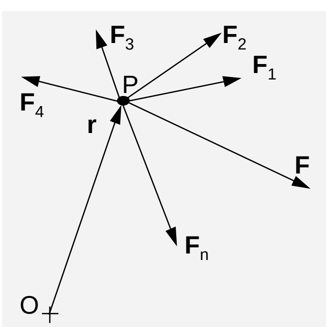
تعتبر فيها وَحَدَات الطول [L]، والزمن [T]، والقوة [F] وَحَدَات أساسية، أما الكتلة فتشتق من هذه الوَحَدَات. وتعرف **وَحْدَة الكتلة بــالكتلة التي تتسارع بوَحْدَة تسارعٍ عند التأثير عليها بوَحْدَة قوة.** أما **وَحْدَة القوة** فتعرف **بقوة جذب الأرض لكتلةٍ عياريَّة** Standard Mass. وإذا تغير موقع تحديد الكتلة العيارية فستتغير تبعاً لذلك وَحْدَة القوة بالنسبة لمجالها الأرضي، أي موقعها. إن الوَحْدَة التثاقلية تعني الوَحْدَة التي تتغير عند تغير موقع الكتلة العيارية بالنسبة لمجال جاذبية الأرض. بينما يحدد مفهوم الوَحْدَة المطلقة أنها غير مرتبطة بموقع الكتلة العيارية نسبة إلى سطح الأرض.

4.3 المعادلة التفاضلية لحركة جسيمٍ تحت تأثير قوىً محددة

اعتبر حركة الجسيم P، كتلته m، وتؤثر عليه مجموعة القوى المحددة $\mathbf{F}_1$ ، $\mathbf{F}_2$ ، $\mathbf{F}_3$ ..... و$\mathbf{F}_n$ التي محصلتها (مُتَّجهها الرئيسي) $\mathbf{F}$، $\mathbf{F}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3+.....+\mathbf{F}n$، **شكل** 1.3.

إذا كان المتَّجِه $\mathbf{r}$ يعرف تموضع هذا الجسيم والمتَّجِه $\mathbf{a}$ يعرف تسارعه، معادلة 35.2، $\mathbf{a}=\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$، فإن المعادلة التفاضلية لحركة هذا الجسيم يتم باستبدال كلٍ من $\mathbf{F}$ و $\mathbf{a}$ الواردتين أعلاه في المعادلة 2.3

$$\mathbf{F}=m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (4.3)$$



شكل 1.3

[4] *CGS* مختصرة من الكلمات الإنجليزية *Centimeter Gram Second* .

هذه المعادلة الاتجاهية تصلح لوصف حركة الجسيم ديناميكياً. كما يمكن تعريف نفس المعادلة بأيٍ من الإحداثيات المختلفة. عندئذٍ تأخذ المعادلة 4.3 أشكالاً قياسية أخرى. فنكتب المعادلة

$$F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k} = m\, a_x \boldsymbol{i} + m\, a_y \boldsymbol{j} + m\, a_z \boldsymbol{k} \qquad 1.4.3$$

في الإحداثيات الديكارتية، أو المعادلة

$$F_n \mathbf{e}_n + F_t \mathbf{e}_t = m\, a_n \mathbf{e}_n + m\, a_t \mathbf{e}_t \qquad 2.4.3$$

في الإحداثيات الطبيعية، أو المعادلة

$$F_r \mathbf{e}_r + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi = m\, a_r \mathbf{e}_r + m\, a_\varphi \mathbf{e}_\varphi \qquad 3.4.3$$

في الإحداثيات القطبية.

حــل المســـائــل

يقوم حل مسائل الديناميكا على تكامل المعادلات التفاضلية والذي يشمل

1- اختيار نقطة الأصل لإطارِ إسنادٍ قصوري منطبقةً على موضع الجسيم الابتدائي قدر الإمكان.

2- تحديد نظام الإحداثيات اللازم للحركة، الديكارتي، أو القطبي، أو الطبيعي بحيث يكون إحداثيٌّ واحد منطبقاً على امتداد الحركة قدر الإمكان.

3- تمثيل الجسيم في موضعٍ اعتباطي arbitrary على الرسم، وليس في موضعٍ خاصٍ له كالموضع الابتدائي.

4- تحديد القوى المؤثرة على الجسيم المتحرك في اللَّحظة المعينة، وتكوين المعادلة التفاضلية لحركته، مثل المعادلة 4.3، أو إحدى مركباتها المختلفة.

5- حلُّ المعادلة (المعادلات) التفاضلية بالطرق الرياضية المعروفة بما يلزم ذلك إيجاد ثابت أو ثوابت التكامل من الشروط الابتدائية للحركة.

وكما ذكر سابقاً في بداية هذا الباب، يوجد في الديناميكا مسألتان. يتطلب حل الثانية تعيين معادلة حركة جسيم تحت تأثير قوةٍ محددة، وهي لذلك الأعقد. وإذا اعتبرنا أنَّ القوة تعتمد بشكلٍ أو بآخر على متغيراتٍ ثلاث هي الزمن والسرجهة والمسافة، فإن حلَّ هذه المسألة سيكون معقداً وفي أحسن الأحوال سيكون حلاً عاماً. لذلك، يقتصر حلنا على مسائلَ محددةٍ، كأن تعتمد القوة على الزمن، أو على السرجهة، أو على المسافة وبشكلٍ منفرد.

القوة تعتمد على الزمن

المعادلة التفاضلية لحركة هذا الجسيم

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}(t) \qquad 5.3$$

ولأن التسارع يساوي مشتقة السرجهة الأولى، $\mathbf{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$، فإن ترتيب المعادلة 5.3 الناتجة وإجراء التكامل عليها يبين أن سرجهة الجسيم تتحدد بالمعادلة التكاملية

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \frac{1}{m}\int_0^t \mathbf{F}(t)\,dt \qquad 6.3$$

وحيث أن السرجهة تساوي مشتقة متجه الموضع ، $\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ، فإن ترتيب المعادلة 6.3 وإجراء التكامل المحدود يبين أن تموضع الجسيم يتحدد بالمعادلة التكاملية التالية

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \boldsymbol{v}_o t + \int_0^t \left[\frac{1}{m} \int_0^t \mathbf{F}(t)\, dt \right] dt \qquad 7.3$$

حيث يظهر الثابتان $\mathbf{r}_o$ و $\boldsymbol{v}_o$ كثابتي تكامل تتحدد قيمهما من الشروط الابتدائية للتكامل.

سؤال م 1.3

اوجد معادلة حركة الجسيم الذي كتلته 5 كيلوغرامات وتؤثر عليه القوة $\mathbf{F} = 6t^2\, \boldsymbol{i}$، إذا ما تحرك من السكون من الموضع الابتدائي $\mathbf{r}_o = 5\boldsymbol{i}$.

الـــحـــــل

بتطبيق قانون نيوتن الثاني لحركة هذا الجسيم وللاتجاه $\boldsymbol{i}$ يكون

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}(t) \quad \Rightarrow \quad 5\, dv_x/dt = 6t^2$$

تتحدد سرعة الجسيم بالمعادلة التكاملية ، حيث تحرك الجسم من السكون يعني أن $v_{xo} = 0$

$$\int_0^{v_x} dv_x = \int_0^t 12\, t^2\, dt \;\Rightarrow\; v_x = 0.4\, t^3$$

وبكتابة السرعة في المعادلة الأخيرة بدلالة مشتقة موضع الجسم

$$v_x = dx/dt \;\Rightarrow\; \int_5^x dx = \int_0^t 0.4\, t^3\, dt$$

نحدد المسافة المقطوعة بعد إجراء التكامل المحدود والأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية للحركة

$$x = 0.1\, t^4 + 5$$

والتي تمثل معادلة حركة الجسيم .

القوة تعتمد على السرجهة

المعادلة التفاضلية لحركة هذا الجسيم

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}(\boldsymbol{v}) \qquad 8.3$$

ولأن التسارع يساوي مشتقة السرجهة الأولى

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

فإن استبدال ذلك في المعادلة 8.3 وترتيبه ثُمَّ إجراء التكامل المحدود يعطي الزمن

$$m \int_{\boldsymbol{v}_o}^{\boldsymbol{v}} \frac{d\boldsymbol{v}}{\mathbf{F}(\boldsymbol{v})} = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad t = f\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_o, \mathbf{F}(\boldsymbol{v})\} \qquad 9.3$$

أو كدالة سرجهة

$$\boldsymbol{v} = g\{t, \boldsymbol{v}_o, \mathbf{F}(\boldsymbol{v})\} \qquad 10.3$$

وباستبدال $\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ في هذه المعادلة ثُمَّ ترتيبها وإجراء التكامل المحدود نحصل على تموضع الجسيم

$$\mathbf{r} = \int_0^t g\{t, \boldsymbol{v}_o, \mathbf{F}(\boldsymbol{v})\}\, dt + \mathbf{r}_o \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = h(t, \boldsymbol{v}_o, \mathbf{F}(\boldsymbol{v}), \mathbf{r}_o) \qquad 11.3$$

حيث أن كلاً من f ، g و h دوالٌ محددة.

سؤال م 2.3

أوجد معادلة حركة ممتص الصدمات الخطي linear damper الذي كتلته m ويتحرك تحت تأثير قوة الاهتزاز الخطية $F = -kv$، حيث k ثابت التناسب و v سرعته بالأمتار لكل ثانية، إذا ناظرت اللحظة الابتدائية $t_o = 0$ السرعة الابتدائية v_o عندما كان ممتص الصدمات على بعد $x_o = 0$. اعتبر الحركة في الاتجاه $\boldsymbol{i}$.

الــحــل

قانون نيوتن الثاني لحركة هذا الجسيم

$$m\,\mathbf{a} = F\,\boldsymbol{i} \quad \Rightarrow \quad m\,a_x = -k\,v \qquad 1$$

وباستبدال التسارع a_x كمشتقة السرجهة الأولى، ثم ترتيب المعادلة 1 للتكامل يكون الحل زمنياً

$$-\frac{m}{k}\int_{v_o}^{v}\frac{dv}{v} = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{m}{k}\ln\frac{v}{v_o}$$

أو كدالة سرعة

$$v = v_o\, e^{-kt/m} \qquad 2$$

وباستبدال السرجهة، في المعادلة 2، كمشتقة الموضع، وترتيبها للتكامل يكون الحل معادلة الحركة التالية

$$x = \frac{m\,v_o}{k}(1 - e^{-kt/m}) \qquad 3$$

القوة تعتمد على المسافة

المعادلة التفاضلية لحركة هذا الجسيم

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \qquad 12.3$$

وباستبدال التسارع $\mathbf{a} = \boldsymbol{v}\dfrac{d\boldsymbol{v}}{d\mathbf{r}}$ في المعادلة 12.3، ثُمَّ ترتيبها وإجراء التكامل المحدود يكون

$$\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v}_o^2) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\mathbf{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \qquad 13.3$$

والتي يمكن حلها بدلالة الموضع بالشكل الضمني implicit التالي

$$\mathbf{r} = q(\mathbf{r}_o, \boldsymbol{v}_o, \boldsymbol{v}, \mathbf{F}(\mathbf{r})) \qquad 14.3$$

حيث أن q دالةٌ محددة.

سؤال م 3.3

تسارع جسيم معرف بالعلاقة

$$a = 3\,x^{2/3} - x/4 \quad [m/s^2] \qquad 1$$

احسب سرعة الجسيم عندما تكون القوة المؤثرة ذات قيمة حدّية. وما سرعة الجسيم القصوى v_{max}؟ الجسيم ذو كتلة، مقدارها الوَحْدَة، يتحرك بدون سرعةٍ ابتدائية من النقطة $P_o(0,0,0)$.

الــحـــــل

القوة حسب قانون نيوتن الثاني

$$F = ma = 1 \times \{ 3 x^{2/3} - x/4 \} \quad [N] \qquad 2$$

وتكون (القوة) ذات قيمة حدِّيَة (أكبر قيمة) إذا ساوينا مشتقتها بدلالة x بالصفر. فنكتب

$$\frac{dF}{dx} = \left\{ 2x^{-1/3} - \frac{1}{4} \right\} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 512 \text{ [m]} \qquad 3$$

نحدِّد سرعة الجسيم كدالة مسافة x فنعوض التسارع $a = v\dfrac{dv}{dr}$ في المعادلة 1، التي تؤول بعد ترتيبها واستبدال الشروط الابتدائية وإجراء التكامل إلى الشكل التالي

$$v dv = \left\{ 3\, x^{2/3} - \frac{1}{4} x \right\} dx \quad \Rightarrow v^2 = 2\left\{ \frac{9}{5}\, x^{5/3} - \frac{1}{8} x^2 \right\} \qquad 4$$

وباستبدال $x = 512$ [m] نجد مقدار السرعة

$$v = 228.97 \text{ [m/s]} \qquad 5$$

أما السرعة القصوى (الحدِّية) فتتحدد من مساواة مشتقة السرعة (أو مربع السرعة) بدلالة المسافة بالصفر. فنكتب

$$\frac{dv^2}{dx} = 2\left\{ \frac{9}{5}\frac{5}{3}\, x^{2/3} - \frac{2}{8} x \right\} = 2x^{2/3}\left\{ 3 - \frac{1}{4} x^{1/3} \right\} = 0 \qquad 6$$

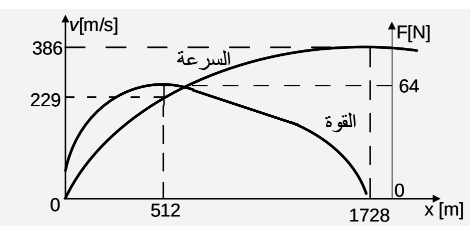
وحلها يعطي

$$x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 1728 \text{ [m]} \qquad 7$$

ومن السهولة بمكان الإثبات رياضياً أن استبدال x_1 في معادلة السرعة 5 يُعطي السرعة الصغرى min. value بينما استبدال x_2 يُعطي السرعة العظمى max. value. وعليه يكون

$$v_{min} = 0 \;\&\; v_{max} = 386.4 \text{ [m/s]} \qquad 8$$

افحص قيم التسارع a للقيمتين x_1 و x_2.



تغير القوة والسرعة بدلالة المسـافة

سؤال م 3.3 : تغير السرعة والقوة بدلالة المسافة

أســئــلــةٌ مــحــلــولــة

سؤال م 4.3

أوجد سرعة وتسارع صندوق، كتلته 12 كيلوغرام في اللحظتين t = 10 ثانية و t = 20 ثانية عندما يتحرك من السكون على سطح أفقي وخشن، معامل احتكاكه الاستاتيكي $\mu_s = 0.2$، والديناميكي $\mu_d = 0.186$، إذا ما سحب الصندوق بقوة أفقية **F** تتغير زمنياً كما في **الرسم البياني** 2.

الــحــل

نحدد نقطة الأصل في الموقع O بحيث ينطبق على الموقع الابتدائي لحركة الصندوق ونمد المحور Ox موازياً للحركة لليمين. الشروط الابتدائية للحركة هي

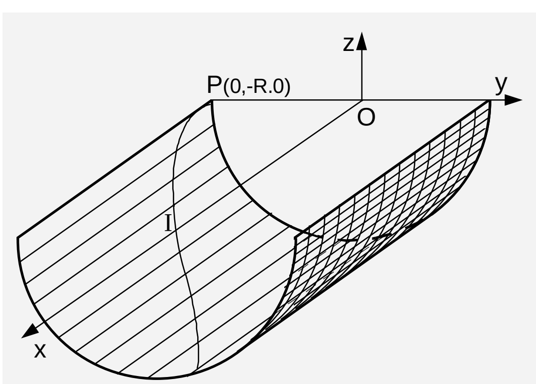
الباب الرابع

حركة الجسيم المقيدة CONSTRAINT MOTION OF APARTICLE

1.4 القيد، مبدأ التحرر من القيد Constraint, Principle of Freedom

لقد درسنا في الباب الثالث حركة الجسيم المتأثر بقوةٍ أو محصلة قوىً اعتماداً على قوانين نيوتن. وقد كانت حركة هذا الجسيم محددةً بمسارها الوهمي في الفراغ عند المعرفة التامة للقوة المؤثرة عليه مقداراً واتجاهاً. وعلى النقيض من ذلك ، تتبع بعض الأجسام الأخرى المتأثرة بقوىً معينةٍ عند حركتها مساراً واضحاً وملموساً، كانزلاق عربةٍ على سكة حديد أو حركة حلقةٍ على سلكٍ منحنٍ. هذا التحديد لحركة الجسيم لم يأت من الشروط الابتدائية للحركة، ولا من القوة الخارجية المؤثرة عليه، بل من جسمٍ أو أجسامٍ أخرى تؤثر على الجسيم المتحرك تأثيراً متصلاً، تَحُدُّ من حركته وتلزمه بمسار محدد. هذا الجسم أو الأجسام الأخرى المرتبطة ارتباطاً وثيقاً بالجسيم المتحرك يُسمى قيداً.

ويدعى الجسيم المتحرك على سطحٍ معين أو على منحنىً معلوم، ويكون مجبراً على تلك الحركة، تحت تأثير قوىً معينةٍ بالجسم المقيد، كما تدعى حركته بالحركة المقيّدة. وتسمى المعادلة التي تُعَرِّف السطح أو المنحنى أو حتى الخط، حيث يجبر الجسيم المتحرك بالسير عليه، متلاصقاً به **بمعادلة القيد**. ومن الضروري أن تُحَقّق إحداثيات الجسيم المتحرك معادلة القيد.



شكل 1.4

لنتأمل حركة كُرَيَّةٍ داخل قناةٍ اسطوانية المقـطـع وأفقية، **شكل** 1.4. فبعد دفعةٍ قليلة باتجاه المحور Ox من الموضع الابتدائي (0,-R,0)، تتحرك الكريَّة على سطح القناة الداخلي تبعاً للمسار I، ودونما قفزٍ أو انفصال عن السطح. إنَّ أيّ نقطةٍ من نقاط هذا المسار، ستحقق معادلة القيد - القناة الاسطوانية

$$f(x, y, z) = y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

وعلى هذا الأساس، فعند الحركة المقيدة للجسيم، يجب أن تكون الشروط الكينماتيكية الابتدائية مُحدّدةٌ، إذ يجب أن تُحقِق إحداثيات الجسيم في كل لحظـةٍ، حتى اللحظة الابتدائية معادلة القيد.

بناءً على ما ورد، يكون الجسيم مـقيـداً إذا كانت حركته لأي سببٍ مُحددّةً بمسارٍ معروف، كأن يكون الجسيم مربوطاً بخيط إلى محور تعليق أو منزلقاً على سطحٍ محدد، ويكون الجسيم مرتبطاً ارتباطاً وثيقاً بهذا المسار أو القيد، يلاصقه وينزلق عليه.

ويمكن اعتبار الجسيم المقيد حراً من قيوده وحراً في حركته متى استبدلنا القيود بمحصلة ردود أفعالها (تأثيرها) على الجسيم المعين. فإذا افترضنا أن محصلة القوى المؤثرة عليه هي **F**، وأن **R** هي محصلة جميع ردود الأفعال، فإن القانون الأساسي لحركة هذا الجسيم المقيد يأخذ الشكل التالي

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \qquad 1.4$$

حيث أن **a** مُتّجِهُ تسارع الجسيم، و m كتلته. ويسمى مبدأ استبدال القيود بردود أفعالِها **بمبدأ التحرر من القيد**.

2.4 معادلة القيد، أنواعه

أياً كان القيد ودون اعتبارٍ لطريقة تركيبه أو للشكل الذي يأخذه يمكن استخراج معادلته تحليلياً لتأخذ الشكل الضمني التالي

$$f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0 \qquad 2.4$$

ولذلك؛ فمعادلة الـقـيــد تعتمد على الزمن ومتَّجِه الموضع **r** والسرجهة $\dot{\mathbf{r}}$. وقد تعتمد على متغيراتٍ أخرى لا مجال لذكرها الآن. أي متغيرٍ من هذه المتغيرات t، **r** و $\dot{\mathbf{r}}$ يُكْسِبُ القيد التسمية المناظرة. فالقيد الذي لا يعتمد على الزمن صراحةً، $\frac{\partial f}{\partial t}=0$، يدعى بالمستقر stationary. والقيد الذي لا يعتمد على السرجهة يسمى بالهولونومي (الهندسي) holonomic. وهناك القيود الإسكليرونومية scleronomic التي تَستوفي الشَرْطين السابقين فلا تعتمد على الزمن ولا على السرجهة، والقيود الهولونومية الزمنية- تُدعى بالريونومية- rheonomic، التي تعتمد على الزمن صراحةً ولا تعتمد على السرجهة. معادلة القيد الريونومي الاتجاهية

$$f(t, \mathbf{r}) = 0$$

وهذا النوع من القيود سيبحث في **الباب العاشر**، بينما يقتصر العمل في هذا الباب على معرفة وحل المسائل التي تحوي قيوداً إسكليرونومية، معادلتها الاتجاهية تأخذ شكل المعادلة الأخيرة بدون الزمن

$$f(\mathbf{r}) = f(x,y,z) = 0 \qquad 3.4$$

والقيود تظهر للجسيم المتحرك وللنظام الديناميكي أو الميكانيكي على شكل خيوطٍ ، قضبان، مفاصل، مساند ثابتة أو متحركة، منحنياتٍ سلكية أو غيرها، أو حتى سطوحٍ يجبر الجسيم المتحرك أو النظام حال ارتباطه

بهذا القيد على الحركة المحددة ضمن مسارٍ محدد. وتعتبر كل آليّة في الطبيعة قيداً مركباً أو حتى نظاماً مقيداً يحوي عدة قيود. وإذا كان حامل الثقل P في البندول البسيط **شكل** 4.5، قضيباً عديم الوزن وبنفس طول الخيط، فإن هذا الأخير سيجبر الكتلة نفسها على الحركة الدائرية المحددة بالقوس P_oP، والمعرّف رياضياً إما بالزاوية φ أو الإحداثيات الديكارتية y و z. ولذلك فالمفصل والقضيب يشكلان قيداً (مركباً) للكتلة المتحركة، والمنحنى الدائري الذي مركزه O ونصف قطره OP يرسم المسار المحدد لهذه الكتلة.

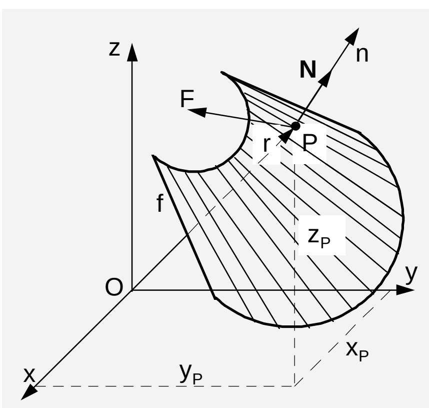
ومن المهم التنويه إلى أن ردّ فعل السـطح أو المنحنى الأملس على الجسـيم المتحرك يكون عمودياً على السـطح أو المنحنى في نقطة التماس. وتدعى هذه القيود، حين يتلاشـى الاحتكاك عند الحركة بالقيود المثالية ideal constraints. وعلى النقيض من ذلك تدعى القيود التي يظهر فيها الاحتكاك كقوة إعاقة بالقيود الحقيقية real constraints.

3.4 المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم المقيد في الإحداثيات الديكارتية

1.3.4 حركة الجسيم المقيد بسطحٍ أملس

إذا افترضنا قيداً إسكليرونومياً وأملساً يتمثل كسطحٍ منحن، معادلته 3.4، فإن ردَّ فعله على الجسيم المتحرك يكون متعامداً في نقطة التلامُس بسبب انعدام الاحتكاك، **شكل** 2.4. وباستبدال تأثير القيد **R** بِردٍّ فعله **N**، و **F** محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم ، كوزنه **mg** مثلاً، نكتب المعادلة 1.4 بدلالة مركباتها على المحاور الديكارتية المتعامدة

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= m\ddot{x} = F_x + N_x \\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= m\ddot{y} = F_y + N_y \qquad 4.4 \\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= m\ddot{z} = F_z + N_z
\end{aligned}
$$



شكل 2.4

هذه المعادلات الثلاث تحوي ستة مجاهيل، ثلاثة مجاهيل للإحداثيات x، y وz، وثلاثة مجاهيلٍ لمركبات ردٍّ الفعل N_x، N_y و N_z. وبالأخذ بعين الاعتبار معادلة القيد 3.4 ومعادلات الحركة 4.4، كمجموع أربع معادلات، فإنه يلزمنا معادلتين إضافيتين لحلّ هذه المسألــة رياضياً.

وبالاعتماد على البديهية القائلة بأن رد فعل السطح الأملس عموديّ عليه، لإلغاء الاحتكاك الموازي عكسياً للحركــة، فإننا نستطيع أن نرسم في موضع تلامس الجسيم المتحرك P متّجِه التَدَرُّجَ[1] **grad** f عمودياً على السطح ومُنطَبِقاً على العمود المقام من نفس موضع الجسيم على السطح المــحــدد Pn. أي أن

[1] **التَدَرُّجَ** أو الانحدار gradient يكتب رياضياً **grad f** أو Ñf، ويقرأ del f (دِلْ f) أو Nabla (نَابْلَه).

$$\mathbf{grad}\ f \equiv \frac{df}{dn}\,\mathbf{e}_n \quad \& \quad \nabla f \equiv \frac{df}{dn}\,\mathbf{e}_n \qquad 5.4$$

حيث $\mathbf{e}_n$ مُتّجِهُ وَحْدَةٍ عمودي على السطح، يُوَضّح الاتجاه الذي يكون فيه $df > 0$. أمّا $\frac{df}{dn}$ فهو المشتــقة العمودية لدالة السطح f. من جهة أخرى؛ المتَّجِهان: التَدَرُّجُ **grad**f وردّ الفعل **N**، متسامتان، لذلك نكتب

$$\mathbf{N} = \lambda\ \mathbf{grad}\ f \qquad 6.4$$

حيث λ هو مضروب لاجرانج Lagrange's Multiplier للقيد الذي يمكن أن يكون دالةً زمنية. كما نكتب المعادلة الأخيرة بعد تحليلها بأيٍ من الصيغتين

$$\mathbf{N} = N_x\boldsymbol{i} + N_y\boldsymbol{j} + N_z\boldsymbol{k} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad 7.4$$

أو

$$N_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x},\ N_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y},\ N_z = \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \qquad 8.4$$

وباستبدال مركبات رد الفعل **N** تؤول المعادلة 4.4 إلى الشكل الجديد

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \qquad 9.4 \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

وبائتلاف هذه المعادلات مع معادلة القيد 3.4، نحصل على أربع معادلاتٍ بأربعة مجاهيل هي الإحداثيات x، y و z، ومضروب لاجرانج λ فقط. إن حلّ المعادلات 9.4 ، يتكون بــ (إجراء) تكاملها مرتين، لنحصل في النهاية على معادلة حركة الجسيم ومضروب لاجرانج الذي يمكن أن يكون دالةً زمنية. هذه المعادلات 9.4، التي تعرف حركة الجسيم المقيدة تسمى **معادلات لاجرانـج من النوع الأول** Lagrange's Equations of the First Kind.

أما ردّ الفعل **N**، فتُحَدّد قيمته من المعادلة

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} = |\lambda\ \mathbf{grad}\ f|$$

$$N = |\lambda|\sqrt{\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial f}{\partial y}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial f}{\partial z}\right\}^2} \qquad 10.4$$

سندرس حركة الجسيم على سطحٍ ثنائيّ الجانب[2] bilateral، وإسكليرونوميّ. هنا يكون مُتَّجِهُ الســرجهة $\boldsymbol{v}$ منطبقاً على المســتوى المماس على السطح. وحيث إن التَدَرُّجَ عمودّيٌ على الســطح، وبالتالي عمودّيٌ على المســتوى المماس المذكور، $\mathbf{grad}\ f \perp \boldsymbol{v}$، لهذا فحاصل الضرب القياسي للمتجهين المذكورين أعلاه يساوي صفراً. أي أن

---

[2] سطحٌ ثنائيُ الجانب: سطحٌ متَّصل ومرتبط بالجسم المتحرك ارتباطاً وثيقاً، يلاصقه ولا ينفصل عنه. لمزيد من المعلومات، انظر **الباب العاشر**، ص 280.

$$\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad}\, f = 0 \qquad 11.4$$

وبحساب المشتقة الأولى لحاصل الضرب القياسي

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}\, f + \boldsymbol{v} \cdot \frac{d}{dt}\, \mathbf{grad}\, f = 0 \qquad 12.4$$

وبضرب طرفي المعادلـــة 12.4 في الكتلة m، ثم استبدال m**a** الناتجة بقيمتها من المعادلة 1.4 للقيد الأملس يكون

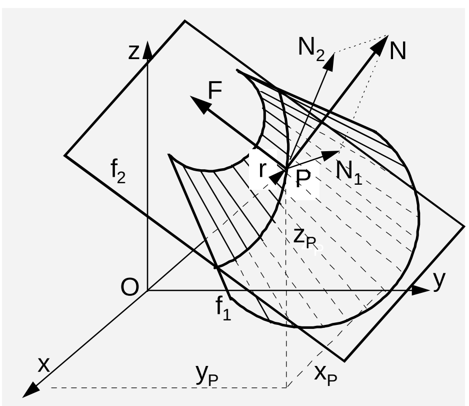
$$(\mathbf{F} + \mathbf{N}) \cdot \mathbf{grad}\, f + m\, \boldsymbol{v} \cdot \frac{d}{dt}\, \mathbf{grad}\, f = 0 \qquad 13.4$$

كما أن استبدال رد الفعل **N** بقيمته من المعادلة 6.4، ينتج أن مضروب لاجرانج يتحدد بالعلاقة

$$\lambda = -\frac{1}{\left|\mathbf{grad}\, f\right|^2}\left[\mathbf{F} \cdot \mathbf{grad}\, f + \boldsymbol{v} \cdot \frac{d}{dt}\, \mathbf{grad}\, f\right] \qquad 14.4$$

وليحسب بعد ذلك رد الفعل من المعادلة 6.4 بعد التعويض عن قيمة λ.

2.3.4 حركة الجسيم المقيد بمنحنىً أملس



شكل 3.4

عند حركة الجسيم على منحنىً أملس وثابت، شكل 3.4، فإن معادلة هذا المنحنى تعرَّف بتقاطع سطحين(قيدين) أملسين، معادلة كلٍّ منهما شبيهةٌ بالمعادلة 3.4 مع إضافة الرمزين 1 و2، أي أن $f_1(x,y,z) = 0$ و $f_2(x,y,z) = 0$. يتكون ردُّ فعل المنحنى على الجسيم المتحرك من ردي فعل السطحين 1 و 2، وهما محدّدان بالمعادلة

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 \qquad 15.4$$

حيث $\mathbf{N}_1$ رد فعل السطح الأول على الجسيم المتحرك ، بينما $\mathbf{N}_2$ رد فعل السطح الثاني على الجسيم نفسه.

وباستبدال رد الفعل **N** في المعادلة 1.4 من المعادلة 15.4 ينتج

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 \qquad 16.4$$

وقياساً على المعادلة 6.4 نحصل على المعادلة الاتجاهية التالية:

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} + \lambda_1\, \mathbf{grad}\, f_1 + \lambda_2\, \mathbf{grad}\, f_2 \qquad 17.4$$

أو المعادلات القياسية، مساقط المعادلة 17.4 على المحاور الديكارتية

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad 1.17.4$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

هذه المعادلات 1.17.4 بالإضافة إلى معادلتي القيدين $f_1\ (x,y,z) = 0$ و $f_2\ (x,y,z) = 0$ تكوِّن مجموعةً من خمس معادلاتٍ ذات خمسة مجاهيل، الإحداثيات الثلاثة x، y و z، ومضروبي لاجرانج λ_1 و λ_2. إن حلّ المعادلات 1.17.4 بإجراء تكاملها مرتين ثُمَّ إيجاد ثوابت التكامل، يُعرِّف معادلة حركة الجسيم المتحرك على المنحنى الأملس والثابت. وقياساً على المعادلة 10.4 نـــجـــد قيمتي ردّي الفعل N_1 و N_2

$$N_1 = |\ \lambda_1\ \mathbf{grad}\ f_1\ | = |\lambda_1|\sqrt{\left\{\frac{\partial f_1}{\partial x}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial f_1}{\partial y}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial f_1}{\partial z}\right\}^2} \qquad 1.18.4$$

$$N_2 = |\ \lambda_2\ \mathbf{grad}\ f_2\ | = |\lambda_2|\sqrt{\left\{\frac{\partial f_2}{\partial x}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial f_2}{\partial y}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial f_2}{\partial z}\right\}^2} \qquad 2.18.4$$

كما نجد، قياساً على المعادلة 14.4، قيمتي مضروبي لاجرانج λ_1 و λ_2

$$\lambda_1 = -\frac{1}{|\mathbf{grad}\, f_1|^2}\,[\mathbf{F} \cdot \mathbf{grad}\, f_1 \ + \ \boldsymbol{v} \cdot \frac{d}{dt}\,\mathbf{grad}\, f_1] \qquad 1.19.4$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{|\mathbf{grad}\, f_2|^2}\,[\mathbf{F} \cdot \mathbf{grad}\, f_2 \ + \boldsymbol{v} \cdot \frac{d}{dt}\,\mathbf{grad}\, f_2] \qquad 2.19.4$$

4.4 المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم المقيد في الإحداثيات الطبيعية

1.4.4 حركة الجسيم المقيد بمنحنىً أملس

إذا أسقطنا المعادلة الاتجاهية 1.4، بعد استبدال $\mathbf{R} = \mathbf{N}$، على الإحداثيات الطبيعية Ptnb، **شكل** 4.4، نحصل على

$$\begin{aligned} m\, a_t &= F_t \\ m a_n &= F_n + N_n \\ m a_b &= F_b + N_b \end{aligned} \qquad 20.4$$

ولأن الحركة تتم في مستوى التلامس، فإن $\mathbf{a}_b = 0$ و $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$، لذلك نكتب المعادلات 20.4 استناداً إلى المعادلات 48.2 بالصيغة الجديدة

$$m\, a_t = m\frac{d^2S}{dt^2} = F_t \qquad 1.21.4$$

$$m\, a_n = m\frac{v^2}{R} = F_n + N_n \qquad 2.21.4$$

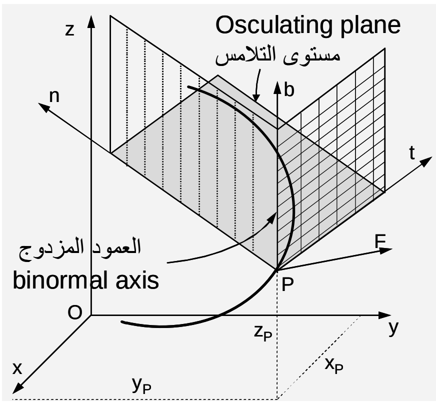
اللتان تدعيان **بمعادلات أويلر** Euler’s Equations لحركة الجسيم على منحنى أملس. إن أفضلية معادلات أويلر لحركة الجسيم المقيدة على معادلات لاجرانج من النوع الأول هي الإمكانية المتوفرة والمباشرة للمعادلات الأولى لإيجاد ردِّ الفعل الديناميكي، وحركة الجسيم في الوقت نفسه على عكس معادلات لاجرانج. ولذلك فتكامل المعادلة 1.21.4 مرتين يعطي الحركة

$$S = S_o + \int_0^t [\int_0^t F_t\,dt + v_o]\,dt \qquad 22.4$$

بينما تعرف المعادلتين الثانية والثالثة من المعادلات 20.4 ردَّ الفعل الديناميكي الذي يعتمد بالإضافة على نوعية القيد والقوى المؤثرة على الحركة ممثلةً في السرعة وتغيرها. ولأن الحركة تتم في مستوى التلامس، $\mathbf{a}_b = 0$ فإن $F_b = 0$ وتبعاً لذلك ينتج من المعادلة الثالثة أن ردَّ الفعل $N_b = 0$. وتؤول تبعاً لذلك المعادلات 20.4 للشكل الجديد

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F_t \qquad 23.4$$

$$m\frac{v^2}{R} = F_n + N_n \qquad 24.4$$



شكل 4.4

1.4.4 حركة الجسيم المقيد بمنحنىً خشن

في هذه الحالة يصبح رد الفعل **R** مكوناً من المركبتين العمودية **N** والمماسية $\mathbf{F}_\mu$. والأخيرة هي قوة الاحتكاك الانزلاقية $F_\mu = \mu N$. إن تعويض قوة الاحتكاك الانزلاقية كقوة أخرى للقوى المؤثرة في الجهة اليمنى في المعادلة 1.4 يعرف المعادلة الاتجاهية لحركة الجسيم المقيد بمنحنىً خشن

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mu\,\mathbf{N} \qquad 25.4$$

أو ثلاث معادلات قياسية ناتجة من إسقاطها على المحاور الطبيعية الثلاثة

$$m\,a_t = m\frac{d^2S}{dt^2} = F_t - \mu N \qquad 26.4$$

$$m\,a_n = m\frac{v^2}{R} = F_n + N \qquad 27.4$$

$$0 = F_b + N_b \qquad 28.4$$

وكما ورد أعلاه بالنسبة للحركة المقيدة بمنحنىً أملس تؤول المعادلات 26.4-28.4 بعد إلغاء الأخيرة للشكل الجديد التالي

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F_t - \mu N \qquad 29.4$$

$$m\frac{v^2}{R} = F_n + N_n \qquad 30.4$$

5.4 مبدأ دالمبير للجسيم المقيد

إذا افترضنا أن المتَّجِه الرئيسي لمحصلة القوى المؤثرة على الجسيم المقيد **F**، $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$ ورد فعل القيد على الجسيم **N**، فإن المعادلة الاتجاهية لحركة هذا الجسيم المقيد تأخذ شكل المعادلة 1.4. وإذا طرحنا من طرفي المعادلة المذكورة الكمية المتَّجِهة **ma** فإننا نحصل على المعادلة

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} - m\,\mathbf{a} = 0 \qquad 31.4$$

وإذا عرّفنا سالب الكمية المتَّجِهة المذكورة أعلاه $-m\,\mathbf{a}$، بقوة قصور الجسيم $\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}$، المساوية لحاصل ضرب كتلته ومتَّجِه تسارعه، مع تحديد اتجاهها بعكس اتجاه التسارع، وحيث تكون وَحَدَاتها مكافئةً لوحدات وأبعاد القوة، فإن المعادلة الأخيرة تؤول إلى

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{in} = 0 \qquad 32.4$$

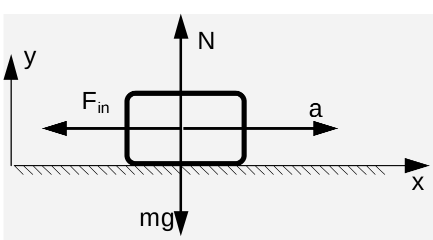
والتي تعرف **بمبدأ دالمبير للجسيم المقيد: إذا أضفنا إلى القوة المؤثرة على الجسيم المتحرك F، وقوة رد فعل القيد N، قوةَ قصوره $\mathbf{F}_{in}$ فإن مجموع هذه القوى الهندسي (الاتجاهي) يكون صفراً**. وبصورةٍ مكافئة **المجموع الهندسي للقوى المؤثرة على الجسيم المتحرك وقوة رد فعل قيده وقوة قصوره يساوي صفراً**. إن العبارة السابقة **مجموع هذه القوى الهندسي يكون صفراً لا تكافئ المفهوم الاستاتيكي لاتزان جسيمٍ يقع تحت تأثير تلك القوى**. إذ يكون الجسيم لحظتها مستقراً لا حراك فيه. أمَّا بالنسبة للجسيم المتحرك فتعني العبارة نفسها أن الجسيم يبقى متحركاً طالما بقي تأثير قوة القصور. ولذلك ؛ تُضاف قوة القصور إلى القوى المؤثرة الأخرى على الجسيم كقوةٍ وهميةٍ ولِتُشَكِّل مجموعةَ قوىً متزنةٍ بدون أن يكون هذا الجسيم المتحرك مستقراً فعلا.

وتكمن أهمية مبدأ دالمبير في أن إضافة قوة القصور إلى القوى المؤثرة الأخرى على الجسيم هو فقط من أجل تكوين معادلاتٍ ديناميكيةٍ شبيهةٍ بمعادلات الاتزان الإستاتيكية، ولِتكون أكثر بساطة من معادلات الديناميكا الأساسية. ولتوضيح كيفية إضافة قوة القصور إلى الجسيم سنأخذ المثالين التاليين:

الحركة المستقيمة والمتسارعة على سطح أفقي أملس

في هذه الحالة، **شكل** 5.4، فإن القوى المؤثرة على الجسم هي قوة وزنه **mg** للأسفل ورد فعل السطح الأملس **N** عمودي على السطح وللأعلى. ولأن متَّجِه تسارع الجسم **a** لليمين مطابقٌ لحركة الجسم، فإن خطَّ عمل قوة القصور هو نفس خط عمل التسارع لكن بالاتجاه العكسي؛ لليسار.

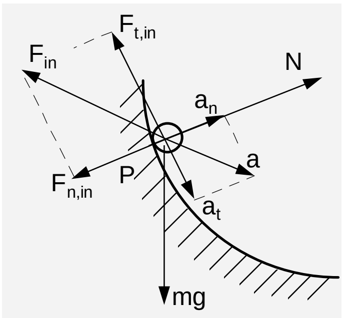
$$\mathbf{F}_{in} = -m\,\mathbf{a} \qquad 33.4$$



شكل 5.4

[3] من الجدير ذكره أن **أويلر** L. Euler أرسل عام 1740 إلى أكاديمية العلوم في مدينة بطرسبرغ بحثاً لا يختلف عن مبدأ **دالمبير**. وقد صاغ الأخير مبدءَ، سُمِّي فيما بعد باسمه وإن كان الأصح أن يُسمى **بمبدأ دالمبير - أويلر**.

الحركة المنحنية والمتسارعة



شكل 6.4

يؤثر على الجسم المتحرك على المنحدر القوسي الأملس، **شكل** 6.4، قوة الوزن m**g** كقوة خارجية وحيدة، أما قوة رد الفعل **N** من السطح الأملس فهي متعامدة مع المماس على السطح المذكور. يتكون متَّجِه التسارع **a** من مركبتين: العمودية $\mathbf{a}_n$، باتجاه مركز المنحدر والمماسية $\mathbf{a}_t$ باتجاه الحركة. لهذا تكافئ قوة القصور $\mathbf{F}_{in}$ المركبتين العمودية $\mathbf{F}_{n,in}$؛ موازيةً عكسياً مع خط عمل التسارع العمودي، والمركبة المماسية $\mathbf{F}_{t,in}$؛ موازيةً عكسياً مع خط عمل التسارع المماسي أيضاً. أي

$$\mathbf{F}_{in} = \mathbf{F}_{n,in} + \mathbf{F}_{t,in} = - m\,\mathbf{a}_n - m\mathbf{a}_t \quad 34.4$$

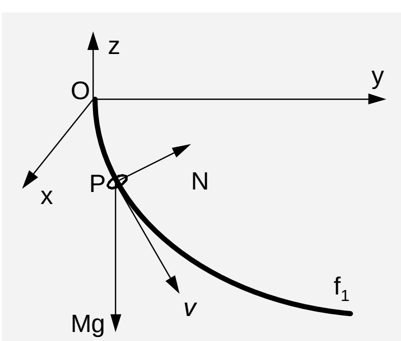
6.4 حــل المسائل

يقوم حلُّ أغلب مسائل الحركة المقيدة على إيجاد رد فعل القيد على الجسيم المتحرك، إذ يتمُّ ذلك بمسارين: الأول، يقوم على استخدام الإحداثيات الديكارتية، معادلات 9.4 للسطح الأملس ومعادلات 17.4 للمنحنى الأملس وذلك من أجل حساب قيمة مضروب لاجرانج λ، وفْقَاً للمعادلة 6.4 ومن ثَمَّ حساب ردِّ الفعل كحاصل ضرب تَدَرُّجَ القيد في هذا المضروب. أما المسار الثاني فيشمل استخدام الإحداثيات الطبيعية، والمعادلات 23.4 - 30.4.

كما يمكن حساب ردِّ الفعل باستخدام مبدأ دالمبير، معادلة 31.4. ولهذا السبب يجب تحديد وضع الجسيم في موضع اعتباطي، وليس في موضع خاص. أما إيجاد سرعة الجسيم في تلك اللحظة فيتم بمعرفة التغير في طاقة حركته، بما يعني ذلك من تداخل مع الباب الخامس من هذا الكتاب. ويتضح من حل المسائل أن رد الفعل الديناميكي يختلف اختلافاً جذرياً عن رد الفعل الاستاتيكي. إذ يعتمد الأول بالإضافة الى القوى المؤثرة وشكل القيد على سرعة الجسم اللحظية.

أســـئـلــة مــحــلــولـــة

سؤال م 1.4



شكل م 1.4

تتحرك حلقةٌ، كتلتها M، على سلكٍ معدني ثابتٍ وأملس، ثني ليرسم معادلة القطع المكافئ $y = z^2$، وذلك تحت تأثيرِ قوة وزنها. أوجد رد فعل السلك على الحلقة في موضعٍ اعتباطي، إذا علمنا أن الحلقة تحركت في اللحظة الابتدائية $t_0 = 0$ من السكون، انطلاقاً من الموضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o = 0$ فما قيمة ردِّ الفعل في الموقع $P_1(0, -, -2)$؟

البـــــــاب الخامس

القوانين العامة لديناميكا الجسيم

1.5 المفاهيم الأساسية

بني البابان الثالث والرابع حول أربعة مفاهيمٍ رئيسيةٍ في الميكانيكا هي القوة والكتلة والطــول والــزمن. وهي مفاهيمٌ تُشكِّل أساساً لقانون نيوتن الثاني. ولذا؛ فعند حل أي مسألـــةٍ ديناميكية، استخدم القانون المذكور بما يرافق ذلك، إيجاد ثوابت التكامل من الشـــروط الابتدائية للحركة، والتي لا حاجة لمعرفتها دائماً. ولهــذا يلـــزم استنباط قوانين ونظرياتٍ، مشتقةٍ من قانون نيوتن الثاني، تربط بين مفاهيمٍ ديناميكيةٍ جديــدة، مـــســـتنبطةٍ مـــن المفاهيم الميكانيكية الواردة أعلاه. أن إدارك هذه المفاهيم الجديدة يشمل أكثر من مجرد معرفة تعريفها أو كتابـــة معادلتها، بل يشمل تعريفها العملياتي، وبعدُها الفيزيائي ووحْدَتَها، وكذلك علاقتُها بالمفاهيم الأخرى مـــن خـــلال القوانين والمعادلات التي تربطها. أضف إلى ذلك ضرورة اكتساب شيء من الإحســـاس الحدســـي، كنوعٍ مـــن الإدراك الفوري للمفهوم، بَعْدَ النظر إليه من زوايا مختلفة، وبعد رؤيته مطبقاً في مواقف متنوعةٍ كافيـــةٍ لجعلـــه مألوفاً. إنّ الربط الأمثل بين هذه المفاهيم الديناميكية الجديدة، الأساسية لحركة الجسيم، فـــي قـــوانين ونظريـــات جديدة، تكفل دراسة بعض الجوانب العملية الهامة للظاهرة المعطاة على حِدَه، بدون اللجوء إلى دارسة الظـــاهرة ككل. ولمعرفة هذه القوانين والنظريات العامة، من الضروري التعرف على هذه المفـــاهيم الديناميكيـــة الجديـــدة لحركة الجسيم، وهي: **الزَّخَم** momentum، **الطَّاقَة** energy و**الزَّخَمُ الـــزَّاوِيّ** angular momentum. لقـــد أثبتت كلُّ هذه المفاهيم فائدتها في حلِّ مُعْضِلات الحركة، واكتسب كلٌّ منها أهميةً خاصة في الميكانيكـــا، بـــسبب ظهوره في قانونٍ للحفظ. كما قاوم كلٌّ منها ثورتي القرن العشريـــن، النظرية النسبية وميكانيكا الكم.

الزّخَمْ[1]: يُعرّف الزخم بأنه **خاصية بحتة للحركة، يأخذ بالاعتبار تأثير حاصل ضرب سرجهة الجسيم اللحظية وكتلته.** أي أنه، إن لم تُوجد أية حركـــة، لن يكون ثمَّةَ أيَّ زَخَم. ورياضياً

$$\mathbf{K} = m\,\boldsymbol{v} \qquad 1.5$$

والرمز المألوف للزخم هو **K**، m كتلة الجسيم، و ***v*** سرجهته. وهو كميةٌ متَّجِهَةٌ يكون اتِّجاهُها بنفس اتجاه السرجهة، وبعدُه الفيزيائي هو حاصل ضرب بعدا الكتلة والسرعة؛ كما أن وَحْدَتَه في **النظام الدولي** ***SI*** هي الكيلوغرام متر لكل ثانية [kgm/s].

الدّفْع impulse: **أحد خصائص تأثير القوة على الجسيم خلال فــترةٍ زمنيةٍ معينة.** فإذا أثرّت على جسيم ما القوة **F**، خلال الفترة الزمنية المحددة Δt، فإن دفع هذه القوة يُعرف بالائتلاف $\mathbf{F}\Delta t$، $\mathbf{P} = \mathbf{F}\Delta t$، حيث يرمز للدفع بالرمز **P**. وبالتالي فبعده الفيزيائي هو حاصل ضرب بعدا القوة والزمن؛ أو بمفاهيم ديناميكيةٍ أساسيةٍ الكتلة×الطول/ الزمن. وإذا ما كانت هذه الفترة متناهية الصغر فإن دفع القوة على هذا الجسيم يعرف رياضياً بـــالتكـــامل المحدود

$$\mathbf{P} = \int_0^t \mathbf{F}dt \qquad 2.5$$

يجب أن لا يغيب عن البال، أن القوة **F** في هذه المعادلة التكاملية دالةٌ زمنية $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$. وإذا ما كانت القوة ثابتة المقدار والاتجاه، ولا تعتمد على الزمن $\mathbf{F} \neq \mathbf{F}(t)$، فإن دفعها الكلي يكون

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\,t$$

وإذا كانت القوة دالة موضع $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r})$، فإن معرفة قانون حركة الجسيم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ضروري لمعرفة دفع القوة تلك. إذ يحسب التسارع كمشتقة ثانيةٍ من قانون الحركة وباستبدال ذلك وِفْقَاً لقانون نيوتن الثاني نحدد القوة، ثم نحدد الدفع من حساب التكامل 2.5. أما إذا كانت القوة دالة سرجهة $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\boldsymbol{v})$، فإن حساب سرجهته ضروريٌ لمعرفة دفع تلك القوة. إذ يحسب التسارع كمشتقة أولى من السرجهة ومن ثم نتتبع الخطوات الواردة أعلاه.

الطـــاقـــة: تلك الكينونة القادرة على إنجاز شغل ما، إما مباشرةً أو من خلال سلسلةٍ من التحولات. ويُعتبر مفهوم الطاقة رئيسياً في الفيزياء والكيمياء وعلم الأحياء، بل في كل حقل من العلوم الطبيعية، بـــالإضافـــة الى الهندسة. وتتميز الطاقة بتعدد الأشكال لكنها تلتزم بقانون حفظٍ يُوحد أشكالها المتعددة. ومن الضروري في هذا الكتاب، معرفة السمات الميكانيكية للطاقة - طاقة الحركة kinetic energy وطاقة الوضع potential energy. والطاقة الحركية هي الكمية القياسية المساويـــة لنصف حاصل ضرب كتلة الجسيم في مربع سرعته $T=m\frac{v^2}{2}$، أما طاقة الوضع (الطاقة الكامنة) فهي الكمية القياسية المعتمدة كلياً على موضع الجســـيم المتحرك؛ أو رياضياً $\Pi = \Pi(\mathbf{r})$، حيث **r** متجه موضع الجسيم. وبالعادة فإن الطاقة الكلية المكونة من مجموع الطاقتين، الحركية والوضعية لجسيمٍ متحرك تبقى كميةٍ ثابتةٍ. وبمقارنة الطاقةَ بالزَّخَم، نجــد أن هذا الأخير أبسط من الطاقة

---

[1] لقد كان **رينيه ديكارت** أول من عرف الزّخَم كمفهوم ديناميكي للحركة.

التي تتميز بتعدد الأشكال. بيد أنه أعقد قليلاً لأنه كميةٌ متَّجِهَةٌ وليس كميةً قياسية. وبعد الطاقة الفيزيائي هو حاصل ضرب بعدا القوة والمسافة. كما أن وَحْدَتَها في **النظام الدولي** *SI* كيلوغرام متر تربيع مقسوماً على الثانية تربيع، التي هي النيوتن متر. وائتلافُ هكذا وحْدَات يُدعى **الجول** $[J] = 1[Nm] = 1\ [kgm^2/s^2]$ 1.

الزَّخَم الزَّاوِي[2]: هو واحدٌ من تلك المفاهيم الأساسية في الميكانيكا. وهو كمِّيَةٌ متَّجِهَةٌ يأخذ بالاعتبار تأثير زخم الجسيم وبعده عن نقطة القياس. ويُعرَّف ككمِّيةٍ مشتَّقةٍ، بدلالة المفاهيم المألوفة للكتلة والسرجهة وموضع الجسـيم المتحرك. أو رياضياً

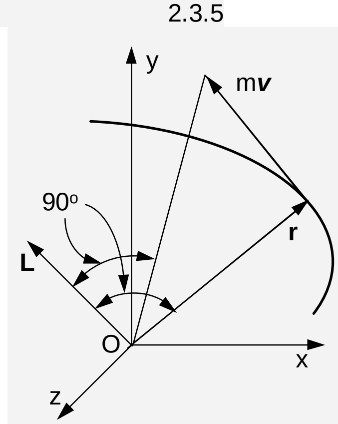
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\, \boldsymbol{v} \;\Rightarrow\; \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{K} \qquad 3.5$$

والرمز المألوف للزخم الزَّاوِّيّ هو **L**، أمَّا **r** فهو متَّجِه موضع الجســـيم نســـبة إلى نقطة أصلٍ اعتباطية. وهذا يعني أنّ الزّخَم الزَّاوِّيّ مــقــداراً واتجاهاً، على حدٍ سواء، قد يعتمد على اختيار ومكان نقطة الأصل. وبالتالي فهو كمتَّجِه يعامد المستوى المكون من المتجهين **r** و ***v***. وتُحَدّدْ قاعدة اليد اليُمنى اتجاهَه كحاصل الضرب الاتِّجاهي على امتداد العمود **L** القائم على المســتوى المذكور، **شكل** 1.5. أما مقدار الزخم الزاوي فيكون

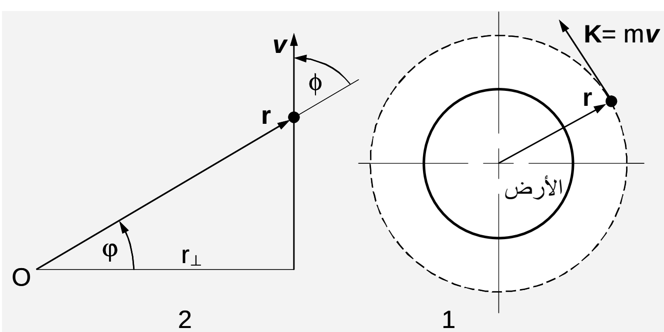
$$L = m\, r\, v \sin\phi = r\, K \sin\phi \qquad 1.3.5$$

حيث ϕ الزاوية المحصورة بين المتَّجِهَين **r** و ***v***. وإذا كانت السرجهة عمودية على متَّجِه الموضع **r**، كما هو الحال في الحركة الدائرية حول نقطة إســنادٍ (أو محــور)، **شكل** 1.2.5، فإن مقدار الزخم الزاوي يكون

$$\mathbf{r} \perp \boldsymbol{v} \quad \& \quad \phi = 90^\circ \;\Rightarrow\; L = m\, r\, v = r\, K \qquad 2.3.5$$



شكل 1.5



شكل 2.5

[2] يعتبر الزخم الزاوي كميةٌ متجهةٌ محورية axial vector في حين أن القوة والسرجهة والتسارع والزخم كمياتٌ متجهةٌ قطبية polar vectors. ويختلف المتجه المحوري عن القطبي في ناحيةٍ واحدةٍ فقط هي أنه: إذا قلبت محاور النظام الإحداثي الديكارتي الموجبة إلى سالبةٍ، فإن كل مركبات المتجه المحوري تظل ثابتة؛ في حين أن كل مركبات المتجه القطبي تغير إشـــارتها.

من جهة أخرى؛ إذا كانت السرجهة متجهةً تماماً نحو نقطة الإسناد، أو بعيدةً عنها (**r** و ***v*** متوازيان) فإن حاصل الضرب الإتجاهي $\mathbf{r}\times\boldsymbol{v}$ يتلاشى، أي يكون الزخم الزاوي صفراً

$$\mathbf{r} \,//\, \boldsymbol{v} \;\;\&\;\; \phi = 0^\circ \quad \Rightarrow \mathbf{L}=0 \qquad 3.3.5$$

أمَّا بالنسبة لاتجاهاتٍ متوسطةٍ للسرجهة، **شكل** 2.2.5، فإن العامل $\sin\phi$ في المعادلة $L = r\,K \sin\phi$ يجعل مقدار الزَّخَم الزَّاوِي متغيراً، تتراوح قيمته ما بين الصفر و rK. كما أن للجسيم الذي يتحرك بسرجهةٍ ثابتة وفي خطٍ مستقيم زخمٌ زاوِيٌّ ثابت نسبةً إلى أية نقطة ثابتة خارج مساره.

ويمكن إعطاء المعادلات 3.5 تأويلاً ميكانيكياً طريفاً، وذلك لإن الزَّخَم الزَّاوِي يمِّيز الحركة الدورانية. فإذا تحرك جسيم في خطٍ مستقيم، متَّجِهاً نحو (مبتعداً عن) نقطةٍ ما، فــإنــه لا يميل إلى الدوران حول تلك النقطة، ولا يكون له زخمٌ زاوِّيٌ بالنسبة إلى تلك النقطة المعينة، معادلة 3.3.5. أمَّا إذا تحرك الجسيم متعامداً مع الخط الذي يصله مع نقطة الإسناد، فإن قابليته للدوران حول تلك النقطة تكون أقصى ما يمكن. وفي تلك الحالة، تتخذ المركبة العمودية $K \sin\phi$ قيمتها القصوى K، معادلة 2.3.5. وبين هذين الحدّين يُساهم جزءٌ معين من الزَّخَمِ ممثلاً في مركِّبته العمودية في دورانه، في حين أن مركبته الموازية للمتَّجِه $K \cos\phi$ لا تفعل ذلك، بل وتدفعه ليتحرك حركةً مستقيمة. وأفضل طريقةٍ للتعرف على ما نُسميه هنا قابلية الجسيم للدوران هي تصور حركة خطٍ وهميٍ مرسومٌ من نقطة الإسناد إلى الجسيم نفسه. فإذا دار هذا الخط عند حركة الجسيم حول نقطة الإسناد، كان للجسيم زَخَمٌ زاويٌّ، وإذا لم يَدُرْ، بل اكتفى بالامتداد أو الانكماش عند حركة الجسيم، فلا يكون للجسيم زخم زاوي.

وكما يتضح من التعريف فإن البعد الفيزيائي للزَّخَم الزَّاوِيُّ هو حاصل ضرب أبعاد الكتلة والسرجهة والمسافة؛ كما أن وَحْدَتَهُ في **النظام الدولي** ***SI*** هي الكيلوغرام متر تربيع لكل ثانية $[\mathrm{kgm^2/s}]$، أو نيوتن متر ثانية [Nms]. ومن الملائم، من خلال تحليل الحركة أن نُميّز بين ضَرْبَيْن من الزَّخَم الزّاوي: الزَّخَم الزَاوِيُّ المداريُّ orbital angular momentum، والزخم الزاوي المغزليspin angular momentum. وينشأ الزَّخَم الزّاويُّ المداري، كما هو معروف عن حركة مركز كتلة جسم ما حول نقطة إسنادٍ معينة. أما الزخم الزّاويُّ المغزلي؛ أو كما يُسمّى غالباً **الغزل** spin فهو الزخم الزّاويُّ المقترن بدوران الجسم ذاته، أو بدوران أي نظام حول مركز كتلته. وهذا الأخير سيبحث في **الباب الثامن**.

2.5 قوانين الزَّخَم

لقد تحدّد في البند 1.5 أن الزَّخَم يكتسب أهميةً خاصةً لأنَّه، تحت ظروفٍ معينةٍ (وبالتحديد في الأنــظمــة المعزولة) يكون محفوظاً. وهناك سببٌ آخر يدعو المرء إلى تعريف الزخم: إنَّه خاصية الحركة الأكثر ارتباطاً بالقوة بصورةٍ بسيطــةٍ ومباشرة.

1.2.5 قانون تَــغَيُّــر زخم الجسيم Momentum Change

معدل تَغَيُّر الزَّخَم يساوي القوة المؤثرة. هذا هو قانون تغير الزخم؛ إذ بمفاضلة المعادلة 1.5 (بما أن الكتلة m ثابتة) يكون:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad 4.5$$

والطرف الأيمن في المعادلة 4.5 هو حاصل ضرب الكتلـــة والتسارع، والذي يُساوي القوة المؤثرة على الجسيم حسب قانون نيوتن الثاني. وعلى ذلك يمكن استبدال هذه المعادلة بـــالـــعلاقـــة

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F} \ , \quad m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{F} \qquad 5.5$$

التي تُعرف قانون تغَيُّر زَخَمِ الجسيم بصورةٍ تفاضلية: **المشتقة الأولى لزَخَم جسيمٍ ما يُساوي القوة المؤثرة عليه**. أو بشكلٍ أكثر اختصاراً **القوة تساوي معدل تَغَيُّر الزَّخَم**. ويمكن تعريف هذا القانون بطريقة أخرى، وذلك بالربط بين دفع القوة والزخم. فبعد ضرب طرفي المعادلة 5.5 بـــ dt ، نحصل على

$$m\, d\boldsymbol{v} = \mathbf{F}\, dt$$

وبإجراء التكامل على طرفي هذه المعادلة، حيث يتغير الزمن t من $t_0 = 0$ إلى t، والسرجهة من $\boldsymbol{v}_o$ إل $\boldsymbol{v}$، ثم ربط الناتج مع المعادلة 2.5 نحصل على

$$m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_o) = \int_0^t \mathbf{F}dt = \mathbf{P} \qquad 6.5$$

التي تعرف قانون تَغَيُّر الزَّخَم بصورةٍ تكاملية: **التغير في زخم جسيم ما خلال فترة زمنية معينة يســـاوي دفع القوة المؤثرة الذي زُوِّدَ به الجســـيم في تلك الفترة الزمنية**، أو بشكلٍ أكثر اختصاراً **الدفع يساوي تَغَيُّر الزَّخَم**. وكثيراً ما يُستخدم عند حل المسائل مساقط المعادلة الاتجاهية 6.5 بدلاً من المعادلة نفسها، وعند ذلك تتحدد مركبات دفع القوة **P**

$$\begin{aligned} m(v_x - v_{ox}) &= P_x \\ m(v_y - v_{oy}) &= P_y \qquad 1.6.5 \\ m(v_z - v_{oz}) &= P_z \end{aligned}$$

وفي حالة الحركة المستوية أو المستقيمة، يُعبَّر عن قانون تَغَيُّر زخم الجسيم بدلالة معادلتين، أو حتى معادلة واحدة من معادلات 1.6.5، اعتماداً على المستوى أو الإحداثي المحدد بالترتيب.

2.2.5 **قانون حفظ زَخَم الجسيم** Conservation of Momentum

إذا كانت القوة المؤثرة على الجسيم تساوي صفراً، فإن زخم الجسيم يكون كميةً ثابتةً في المقدار والاتجاه، بما يعني أن **السرجهة ثابتةٌ**. ومن المعادلتين 5.5 و6.5

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = \text{const}, \ m\boldsymbol{v} = \text{const.}$$
$$\Rightarrow m\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}_o \ \Rightarrow \ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o \quad \& \ \boldsymbol{v} = \text{const.} \qquad 7.5$$

هذه المعادلة 7.5، والتي نتجت سواءً من المعادلة 6.5 أو من تكامل المعادلة 5.5، عندما كانت القوة صفريةً $\mathbf{F} = 0$، تُعَرِّف قانون حفظ زَخَم الجســـيم. وبالتالي، فعند انعدام القوة يتحرك الجســيم حركةً منتظمةً وبخطٍ مستقيم، التي دعاها **غاليليو** بحركة القصور. من جهة أخرى، إذا تحرك الجسيم بحيث أن القوة ليست صِفْرِية، لكن مسقط هذه القوة على أحد المحاور، وليكن Ox مثلاً، يُساوي صفراً $\mathbf{F}_x = 0$، فإن

$$m\,(v_x - v_{ox}) = \text{const.} \;\Rightarrow v_x = v_{ox} = \text{const.} \qquad 1.7.5$$

ولهذا فالجسيم سيتحرك في الاتجاه ***i***، حركةً منتظمةً وبخطٍ مستقيم.

حـــل المسائل بواسطة قوانين الزَّخَم

إن معرفة القوة المؤثرة على الجسيم وزمن الحركه يحدِّدان قيمة التغير في سرعة الجسيم، وذلك بالتطبيق المباشر لقانون تغير الزَّخَم، المعادلتان 5.5 و 6.5. أما إذا كانت حركة الجسيم قصوريةً، أي لا تأثير لأية قوةٍ عليه باتجاه حركته، فإن سرعـــة الجسيم تتحدد من قانون حفظ الزَّخَم - معادلة 7.5. ومن ذلك نحل المسألة الثانية في الديناميكا.

أسـئـلــةٌ مــحــلــولــة

3.5 قوانين الزَّخَم الزَّاويُّ

1.3.5 قانون تَّغَيُّر الزَّخَم الزَّاوِيُّ Angular Momentum Change

لقد عُرِّف الزَّخَم الزَّاوِيُّ رياضياً بدلالة مفاهيم سبق تأسيسها. ولذلك ليس عجيباً اشتقاق قانون تَغَيُّره رياضياً دون الحاجة إلى أساسٍ تجريبيٍ جديد. فنبدأ بمفاضلة طرفي المعادلة 3.5، انظر المعادلة 40.I

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v} + \mathbf{r} \times \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$$

وحيث إن $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$، والمتَّجِهين $\boldsymbol{v}$ و $m\boldsymbol{v}$ متوازيان، فإن الحد الأول على اليمين في هذه المعادلة يساوي صفراً

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times m\,\boldsymbol{v} = 0$$

كما أن الحد الثاني $\mathbf{r} \times \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$، بــربطــه بمعادلة 5.5 يصبح مساويـــاً لعزم دوران القوة

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{r} \times \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

والذي بتعويضه في المعادلة الأساسية نحصل على

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_F \qquad 8.5$$

وهذا هو قانون تَغَيُّر الزَّخَمِ الزَّاوِيُّ لجسيمٍ متأثرٍ بقوةٍ: **المشتقة الأولى للزَخَم الزَّاويُّ لجسيم حول مركزٍ ما، يساوي عزم الدوران الرئيسي للقوى المؤثرة على هذا الجسيم حول نفس المركز**. أوبشكلٍ أكثر اختصاراً **عزم القوة الرئيسي يساوي معدل تَغَيُّر الزَّخَمِ الزَّاوِيّ**. ومن الطبيعي إسناد كلٍ من العزم الدوراني $\mathbf{M}_F$ والزَّخم الزَّاويّ $\mathbf{L}$ إلى نفس نقطة الأصل.

ومن السهولة بمكان التعرف على طريقتين محددتين للتأثير بهما على جسيم ما دون أن تُحْدِث هذه القوة عزماً دورانياً، وهما: القوة تؤثر في نقطة الأصل المختارة، عندئذ يكون $\mathbf{r} = 0$. والقوة تُؤثر باتِّجَاه، أو بعيداً عن نقطة الأصل، عند ذلك يكون $\mathbf{r}$ موازياً للقوة. وتعتبر قوة الجاذبية أكثر القوى استجابةً للشرط الثاني. ولذلك لا تؤثر الشمسُ - نتيجة قوى الجذب المتبادل بينها وبين الكواكب الأخرى - بأي عزمٍ دورانيٍ على أيِّ كوكب، إذ يكون الزَّخَمُ الزَّاوِيُّ للكوكب ثـــابتـــاً بالنسبة إلى مركز الشمس.

2.3.5 قـــانـــون حفظ الزَّخَمُ الزَّاوِيُّ Conservation of Angular Momentum

تحت أي ظرفٍ يظل الزَّخَمُ الزَّاوِيُّ لجسيمٍ ما ثابتاً؟ ..... تزودنا المعادلة 8.5 بإجابةٍ فوريةٍ. فإذا كان العزم الرئيسي المؤثر على جسيمٍ ما يساوي صفراً، يظل زخمه الزَّاوِيُّ ثابتاً. والمعادلة 8.5 على الصورة المبينة تلك، تنطبق على أي جسيمٍ، وعليه نكتب

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \text{const.} \qquad 9.5$$

أي أن الجسيم المتحرك الذي عزمه الدوراني يساوي صفراً، سيكون متحركاً تحت تأثير زَخَمٍ زاوِيٍّ ثابتٍ مقداراً واتجاهاً. وعلى ذلك، فالزَّخَمُ الزَّاوِيُّ لجســيمٍ ما تحت تأثير قوة مركزية - القوة التي خط عملها يمر بنقطة الإســناد سيكون ثابتاً مقداراً واتجاهاً. ومن نظرية المتَّجِهات والمعادلة 3.5، نستنتج أن الزَّخَمُ الزَّاوِيُّ كمُتَّجِهٍ يكون عمودياً وثابتاً على كلٍ من المتَّجِهَين $\mathbf{r}$ و $\mathbf{K}$. ولذلك فالمتَّجِهَان المذكوران يُكَوِّنان مستوىً واحداً ووحيدا. **أي أن الجسيم سيتحرك حركة مستويـــةً، إذا كان زَخَمَهُ الزَّاوِيُّ ثابتاً مقداراً واتجاهاً** [3].

حـــلُّ المسائل بواسطة قوانين الزَّخَمُ الزَّاوِيُّ

إذا تَغَيَّر موضع الجسيم $\mathbf{r}$ بالإضـــافة إلى (تَغيُّرِ) زخمه $\mathbf{K}$، فإن قانون تَغَيُّرِ زَخَمِه الزّاويُّ، معادلة 8.5، تُحَدِّد عزم القوة ، أو القوة المؤثرة على الجسيم. وعلى النقيض من ذلك، إذا كان عزم القوة حول محور دورانٍ ما صفراً، فإن تطبيق قانون حفظ الزَّخَم الزَّاوِيَ، معادلة 9.5، يضمن إيجاد حركة الجسيم - موضعه أو سرجهته، أي حل المسألة الثانية في الديناميكا.

أسـئـلــةٌ مــحــلــولــة

[3] لمزيدٍ من المعلومات ، انظر **الباب السادس**: **حركة الجسيم تحت تأثير القوة المركزية**.

4.5 شُغْــلُ القُوَّة Work of a Force

نبدأ بتعريف الشغل للحالــة الخاصة التي تؤثر فيها قوةٌ ثابتةٌ على الجسيم. فإذا عانى هذا الجسيم من تأثير القوة الثابتــة **F** إزاحةً **S**، فإن الشغل الذي بذلــتــه القوة المذكورة على الجسيم يساوي حاصل الضرب القياسي للقوة والإزاحة. أو رياضياً

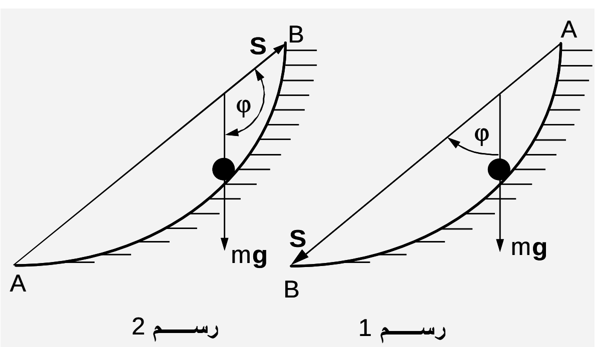
$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$$

ويبين هذا التعريف على الفور عدة أشياءٍ مهمة عن الشغل. فهو كميةٌ قياسية؛ يتضمن كلاً من القوة المؤثرة على الجسيم و(مسافة) حركة الجسيم، ولا يُعرَّف الشغل عند لحظــةٍ أو نقطة؛ بل على امتداد فترة. وَوَحْدَتَهُ في **النظام الدُّوليّ** *SI* هي النيوتن متر، التي هي **الجول**. وباستخدام تعريف حاصل الضرب القياسي للمتَّجِهَات، معادلة 17.I، نستطيع كتابة الشغل على الصورة

$$A = F\,S\cos\varphi \qquad 10.5$$

حيث φ الزاوية المحصورة بين متجهي القوة **F** والإزاحة **S**. وللزاوية الحادة φ أقل من 90^o، يكون الشغل المبذول موجباً، أي أن القوة تبذل شغلاً موجباً على الجسيم. بينما للزاوية المنفرجة، $90° < \varphi < 180°$، فإن القوة تُعاكس الحركة بصورةٍ عامة، ويكون الشغل سالباً.

وبالعادة نَصِفُ الشغل السالب إمّا بقولنا إن القوة تبذل شغلاً سالباً على الجسيم المتحرك، أو أن الجسيم يبذل شغلاً على محيطه. ولإشارة الشغل المعنى العملي التالي: يكون الشغل موجباً إذا عملت القوة المؤثرة على تسريع الحركة، **شكل** 1.3.5، ويكون الشغل سالباً إذا عملت القوة المؤثرة على إبطاء الحركة، **شكل** 2.3.5. ولذلك يكون شغل قوة الجاذبية للجسم الساقط موجباً وشغل قوة الاحتكاك سالباً.



شكل 3.5

وكما هو معروفٌ من الكينماتيكا، تساوي إزاحة الجسيم الأولية أثناء حركته على منحنىً القيمة المطلقة لمتجه الإزاحة الأولية dr، $dS = |\mathbf{dr}|$

$$dA = \mathbf{F} \times d\,\mathbf{S} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

وباستغلال خاصية الضرب القياسي للمتجهات، معادلة 24.I، يكون

$$dA = \mathbf{F}_x dx + \mathbf{F}_y dy + \mathbf{F}_z dz \qquad 11.5$$

هذه المعادلة تعني أن شغل القوة المبذول يساوي جبرياً مجموع أشغال مركباتها F_x، F_y و F_z عند معاناة الجسيم الإزاحات الأولية dx ، dy و dz بالترتيب. وهو يعني تحليلياً أن الجسيم إذا ما عانى الإزاحة الأولية dx فقط فإن شغل القوة **F** الأولي يساوي $\mathbf{F}_x dx$، ولا تبذل باقي مركِّبات القوة F_y و F_z شغلاً على الجسيم، أي أن $\mathbf{F}_y dy = \mathbf{F}_z dz = 0$. وعلى الغرار نفسه، عند إزاحة الجسيم الأولية dy فإن شغل القوة الأولي يساوي $\mathbf{F}_y\, dy$

فقط، بينما $F_x dx = 0$ $F_z dz =$. وأخيراً عند معاناة الجسيم الإزاحة الأولية dz فقط فإن شغل القوة الأولي يساوي $F_z dz$ بينما $F_x dx = F_y dy = 0$. وحيث إن الجسيم يعاني الإزاحات الأولية الثلاث dx، dy و dz في الوقت نفسه، فإن شغل القوة الأولي الكلي يكون بالمجموع الجبري 11.5.

لقد لاحظنا فيما سبق شرحه وبالتحديد المعادلتين 10.5 و11.5، أن مركبة القوة الموازية لمتجه الإزاحة هي التي تبذل شغلاً فقط، بينما لا تبذل مركبة القوة العمودية على متجه الإزاحة شغلاً. بناءً على ذلك، وعند الحركة المنحنية، فإن مركبة القوة المماسية F_t، تعمل على تغيير مقدار سرجهة الجسيم بإكسابه إزاحةً على طول المنحنى وتسارعاً مماسياً a_t، ولهذا ؛ فهي التي تبذل شغلاً. أمّا المركبة العمودية على منحنى الحركة F_n، فهي تعمل على تغيير اتجاه سرجَهة الجسيم $\boldsymbol{v}$، مكسبةً إيّاه تسارعاً عمودياً a_n، دون أن تُؤثر على مقدار سرجهته أو حتى إزاحته من موقعه. ويمكن توضيح ذلك بدلالة الزاوية φ، حيث أن الزاوية المحصورة بين القوة العمودية والإزاحة قائمةٌ، $\cos\varphi = 0$ في العلاقة 10.5، مما يعني أن شغلها ذو قيمةٍ صفرية.

أما إذا كانت القوة المؤثرة على الجسيم غير ثابتةٍ، فإن الشغل الذي تبذله هذه القوة لإزاحةٍ متناهية الصغر $d\mathbf{S}$ **(الشغل الأولي)**، يُعرف رياضياً بالعلاقة

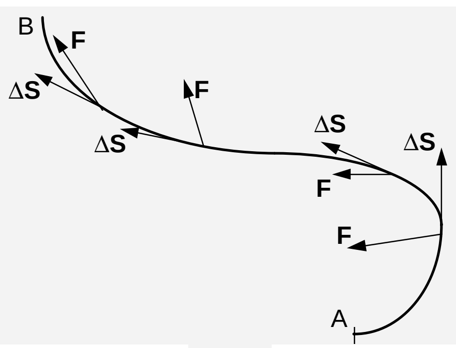
$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

ويُمثل هذا أهم تعريف للشغل في الميكانيكا. وهو يستلزم أنّ تزايداً محدوداً (وبالتالي يمكن قياسه) من الشغل يجب أن يُعَبر عنه على صورة التكامل المحدود

$$A_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \qquad 12.5$$

ويدعى هذا التكامل رياضياً بالتكامل الخطي line integral، لأن قيمته تتحدد على امتداد المسار الفعلي، أو على امتداد خطٍ في المكان (ليس ضرورياً أن يكون خطاً مستقيماً)، يتبعه الجسيم عند إزاحته من A وحتى B. وحساب قيمته ليس بالأمر العسير ميكانيكياً، فلإية إزاحة إضافية ΔS، على امتداد المسار AB، **شكل** 4.5، يحسب الشغل الإضافي $\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{S}$، وتجمع هذه الكميات القياسية لتحديد الشغل الكلّي.

وأخيراً؛ يمكن الاستنتاج من المعادلات 10.5 - 12.5 أن القوة التي يمكن حساب شغلها بدون معرفة قانون الحركة، هي القوة الثابتة مقداراً واتجاهاً $\mathbf{F} = const.$، والقوة المعرفة كدالة موضع $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. أما بقية القوى وخاصةً القوة المعرفة بـــدلالة الزمن $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$، أو القوة المعرفة بـــدلالة السرجهة $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\boldsymbol{v})$، فإن معرفة شغل هذه القوى، يستلزم معرفة قانون حركة الجسيم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.



شكل 4.5

1.4.5 **القوى المحـــافــظة وطاقة الوضع** Conservative Forces & Potential Energy

إذا تأثر جسيم بالقوة **F**، (ليس من الضروري أن تكون ثابتة) عند حركته من النقطة A إلى النقطة B، **شكل** 4.5، فإن هذه القوة تبذل شغلاً على الجسيم يمكن تعريفه بالتكامل المحدود 12.5. هذا الشغل يعتمد على ماهية القوة **F** هل هي قوةٌ احتكاكية بين الجسيم المتحرك وسطحٍ ما، أم قوةٌ وزنٍ تحت تأثيرها يتحرك الجسيم. أي عمَّا إذا كانت القوة تعتمد على مسار الجسيم أم لا. هذا يقودنا إلى تعريف مفاهيم جديدة تحدد الشغل المبذول على الجسيم وهي القوى المحافظة وطاقة الوضع اللتان تعرفان بتعريف مجال القوى ودالة القوى.

يعرف الجزء المحدود أو غير المحدود من الفراغ، حيث تؤثر في كلِّ نقطةٍ منه قيمةٌ محددةٌ لكميةٍ فيزيائية بمجال Field تلك الكمية. وبالاعتماد على تلك الكمية هل هي كميةٌ متَّجِهَةٌ أو كميةٌ قياسيةٌ يكون المجال متَّجِهَاً أو قياسياً. ومن أمثلة المجالات القياسية يعتبر مجال درجة الحرارة أشهرها، كما يعتبر مجال القوى ومجال السرجهة ومجال التسارع مجالاتٍ اتجاهية.

كما يعرف مجال القوة Force Field بجزء الفراغ المحدود أو غير المحدود الذي تؤثر في كلٍّ نقطةٍ منه على الجسيم المادي الموجود ضمن هذا الفراغ قوةً تعتمد فقط على موضع هذا الجسيم. ويعتبر مجال جاذبية الكوكب أو الشمس مثالاً حياً لمجالات القوى Gravitational Force Field

من جهةٍ أخرى، إذا اتضح وجود دالةٍ أخرى، ولتكن U ، $U = U(x,y,z)$ وبحيث إن تفاضلاتها الجزيئية بدلالة الإحداثيات الديكارتية تساوي مركبات القوة على تلك المحاور وبالترتيب

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

فإننا نستطيع كتابة محصلة القوى كالمتجه

$$\mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad 1.13.5$$

أو

$$\mathbf{F} = \mathbf{grad}\, U \qquad 2.13.5$$

أي أن القوة تساوي **تَدَرُّجَ** الدالة U. وتدعى هذه الدالة U بدالة القوة **F**، Force Function. ويعرف مجال تلك القوة بمجال القوة الوضعي أو مجال القوة المحافظ، كما تدعى قوة المجال الوضعي أو قوة المجال المحافظ بالقوة الوضعية أو القوة المحافظة. وإذا عرفنا عنصر الشغل الأولي للقوة المحافظة **F** إذا ما عانى الجسيم إزاحةً أولية $d\mathbf{r}$

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

فإن استبدال القوة **F** من المعادلة 1.13.5 و $d\mathbf{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}$ في هذه المعادلة ينتج

$$dA = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} \right\} \cdot \left\{ dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k} \right\}$$

$$dA = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad 1.14.5$$

أو بشكل أكثر اقتضاباً

$$dA = dU \qquad 2.14.5$$

أي أن عنصر الشغل الأولي للقوة المحافظة يساوي التفاضل الكلي لدالة القوة U. وبإجراء التكامل على طرفي هذه المعادلة، عند الإزاحة بين النقطتين A و B يكون

$$A_{AB} = \int_A^B dU(x,y,z)$$

لنجد أن الشغل الكلي

$$A_{AB} = U_B - U_A \qquad 15.5$$

يساوي الفرق بين دالتي القوة عند تلك النقطتين النهائية B والابتدائية A، ولا يعتمد على شكل المسار ولا على طوله من A حتى B.

أمّا مفهوم طاقة الوضع، فيعتبر من المفاهيم التي تميز احتياطي الشـــغل الكامن في الجسيم عند موضعٍ معلوم ضمن مجال القوى المحافظ. وهو شكلٌ من أشكال قدرة أو قابلية الجسيم على إنجاز شغل نتيجةً للموقع النسبي الذي يتواجد فيه الجسيم. ولذلك يمكن تعريف طاقة وضع جسيمٍ عند موضعٍ معين بأنها المقدار القياسي الذي يساوي الشغل الذي تبذله قوى المجال عند إزاحة الجسيم من موضعه إلى نقطة الصفر. أي أن

$$\Pi = - A_{AB}$$

$$A_{AB} = \Pi_A - \Pi_B \qquad 16.5$$

وبشكلٍ آخر بدلالة عنصر الشغل

$$d\Pi = - dA_{AB}$$

ونقطة الصفر هنا نقطة اعتباطيةٌ في المجال اصطلح على تحديدها في ذلك الموضع الذي يكون فيه احتياطي الشغل مساوياً للصفر. وينتج من التعريف أن طاقة الوضع تعتمد على إحداثيات الجسيم. أي أن

$$\Pi = \Pi(x,y,z) \Rightarrow d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz$$

وهذه بعد ربطها بالمعادلتين 1.16.5 و 11.5 ينتج أن

$$-\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz\right\} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

أو

$$\left\{F_x + \frac{\partial \Pi}{\partial x}\right\}dx + \left\{F_y + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\right\}dy + \left\{F_z + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\right\}dz = 0$$

وحيث إن القوة محافظة والشغل المبذول لا يعتمد على مسار الجسيم، فإن هذه المعادلة تصبح صحيحةً لأي قيمٍ تأخذها المتغيرات dx، dy وdz. لذلك فمعاملات هذه المعادلة يجب أن تكون صفراً. أي أن

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

أو

$$\mathbf{F} = -\ \mathbf{grad}\ \Pi \qquad 17.5$$

أي أن القوة المحافظة تساوي التَدَرُّجَ السالب لدالة طاقة الوضع. وإذا ما أخذنا التفاضلات الجزيئية لمركبات القوة F_x و F_y بدلالة الإحداثي y و x بالترتيب

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x}$$

ولأن درجة التفاضلات الجزيئية 2 غير أساسية يكون

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

أو بشكلٍ عام

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \qquad 18.5$$

إذ تمثل هذه المعادلات الشرط الرياضي الواجب توفره حتى تكون القوة محافظةً.

أسـئـلـةٌ مـحـلـولـة

سؤال م 5.5

تؤثر على جسيمٍ ما القوة

$$\mathbf{F} = 6x^2y^3z^4\, \boldsymbol{i} + 6x^3y^2z^4\, \boldsymbol{j} + 8x^3y^3z^3\, \boldsymbol{k} \qquad 1$$

فهل هذه القوة محافظة أم لا؟ وما الشغل المبذول من هذه القوة عند الحركة بين النقطتين $P_o(0,0,0)$ و $P\ (2,2,1)$؟

الـحـل

مركبات القوة من معادلة القوة كمعاملات متجهات الوحدة

$$F_x = 6\,x^2\,y^3\,z^4,\; F_y = 6\,x^3\,y^2\,z^4,\; F_z = 8\,x^3\,y^3\,z^3 \qquad 2$$

والتفاضلات الجزيئية لمركبات القوة

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 18x^2y^2z^4 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = 24\,x^3\,y^2z^3 = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad 3$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = 24\,x^2\,y^3\,z^4 = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

ولاستيفاء الشرط 18.5 بالعلاقات 3 تكون القوة **F** محافظة. ولحساب الشغل الناتج من القوة F نستخدم المفهومين: **دالة القوة** U **ودالة طاقة الوضع** Π

1- **دالة القوة** U: من المعادلة 1.13.5 نجد أن

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 6\,x^2\,y^3\,z^4 \qquad 4$$

وبترتيب هذه المعادلة، ثُمَّ إجراء التكامل نجد أن دالة القوة

$$U = \int F_x\,dx = \int 6\,x^2y^3z^4\,dx \quad \Rightarrow \quad U = 2\,x^3y^3z^4 + f\,(y,z) \qquad 5$$

حيث إن $f\,(y,z)$ دالة لا تعتمد على الإحداثي x، ولذلك يجب تحديد قيمتها بدلالة الإحداثيّين المتبقيين y و z. التفاضل الجزيئي للدالة U، معادلة 5، بدلالة الإحداثي الثاني y يساوي مركبة القوة F_y

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 6\,x^3\,y^2\,z^4 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} \qquad 6$$

وبربط المعادلة 6 مع المركبة F_y، معادلات 2 ، ينتج أن

$$6\,x^3\,y^2\,z^4 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 6\,x^3\,y^2\,z^4$$

أي أن الدالة f لا تعتمد على الإحداثي y أيضاً. ورياضياً فإن

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow f\,(y,z\,) = g\,(z) = const.$$

حيث إن g دالةٌ تعتمد فقط على الإحداثي z (لا تعتمد على الإحداثيين x و y). نكتب المعادلة 5

$$U = 2x^3y^3z^4 + g(z) \qquad 7$$

وبإجراء التفاضل الجزيئي للمعادلة 7 بدلالة الإحداثي الثالث z ينتج مركبة القوة F_z. أي أن

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = 8\,x^3\,y^3\,z^3 + \frac{\partial g(z)}{\partial z} \qquad 8$$

وبربط المعادلة 8 مع F_z، معادلات 2، نحصل على

$$8\,x^3\,y^3\,z^3 + \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 8\,x^3\,y^3\,z^3$$

أي أن

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(z) = const.\;,\; g(z) = C_1$$

وتبعاً لذلك تؤول دالة القوة، المعادلة 7 إلى الشكل الجديد

$$U = 2\,x^3\,y^3\,z^4 + C_1 \qquad 9$$

الشغل المبذول بين النقطتين P_o و P يساوي الفرق بين دالتي القوة U، معادلة 15.5

$$A_{P_oP} = U - U_o$$

$$A_{P_oP} = 2 \times 2^3 \times 23 \times 1 - 0 = 128\ [J\,]$$

2- **طاقة الوضع** Π: ننطلق من المعادلة 17.5 والمركبة الأولى F_x

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 6\,x^2\,y^3\,z^4 \qquad 10$$

وبترتيب هذه المعادلة، ثُمَّ إجراء التكامل نجد أن دالة طاقة الوضع

$$\Pi \;=\; -\int 6\,x^2\,y^3\,z^4\,d\,x$$

$$\Pi \;=\; -\,2\,x^3\,y^3\,z^4 \;+\; q\,(y,z) \qquad 11$$

حيث أن $q\,(y,z)$ دالة لا تعتمد على الإحداثي x، ولذلك يجب تحديد قيمتها بدلالة الإحداثيّين المتبقيين y و z. نكتب من المعادلة 17.5، انظر المعادلة 11

$$F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = \;6\,x^3\,y^2\,z^4 \;-\; \frac{\partial\,q(y,z)}{\partial\,y} \qquad 12$$

وبربط المعادلة 12 مع F_y من المعادلات 2، ينتج أن

$$6\,x^3\,y^2\,z^4 \;-\; \frac{\partial\,q(y,z)}{\partial\,y} = \;6\,x^3\,y^2\,z^4$$

أو

$$\frac{\partial\,q(y,z)}{\partial\,y} = 0 \quad \Rightarrow \quad q(y,z) = \text{const.}$$

أي أن الدالة q ثابتة المقدار بالنسبة للإحداثي y أيضاً. ورياضياً فإن

$$q(y,z) = r\,(z) = \text{const.}$$

وتؤول، تبعاً لذلك دالة طاقة الوضع إلى الشكل الجديد

$$\Pi \;=\; -\,2\,x^3 y^3 z^4 \;+\; r(z) \qquad 13$$

وبالطريقة نفسها، نحسب سالب التفاضل الجزيئي للدالة Π، بدلالة الإحداثي الثالث z، معادلة 13، ليساوي F_z

$$F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 8\,x^3\,y^3\,z^3 \;-\; \frac{\partial\,r(z)}{\partial\,z} \qquad 14$$

وهذه تساوي F_z من المعادلات 2

$$8\,x^3\,y^3\,z^3 \;-\; \frac{\partial\,r(z)}{\partial\,z} = \;8\,x^3\,y^3\,z^3$$

أي أن الدالة r ثابتة في المقدار بالنسبة للإحداثي z. ورياضياً فإن

$$\frac{\partial\,r(z)}{\partial\,z} = 0 \quad \Rightarrow \quad r(z) = \text{const.} = C_2$$

وبعد استبدال الدالة $r(z)$ في المعادلة 13 بالثابت C_2، نجد أن دالة طاقة الوضع

$$\Pi \;=\; -\,2\,x^3 y^3 z^4 \;+\; C_2 \qquad 15$$

أخيراً، الشغل المبذول بين النقطتين P_o و P يساوي الفرق بين دالتي طاقتي الوضع، وذلك طبقاً للمعادلة 16.5

$$A_{P_oP} \;=\; \Pi_o - \Pi \;=\; 0 - (\,-\,2 \times 2^3 \times 2^3 \times 1) = 128\ [\,J\,]$$

2.4.5 الـقُـدْرَة Power

تُعرف القدرة بأنها المعدل الذي تُنْقَل به الطاقة E من وإلى جسيم ما. وبالعادة يرمز لها بالرمز P

$$P = \frac{dE}{dt}$$

ووحدَة القدرة في **النظام الدولي** ***SI*** هي الواط $1\ [W] = 1\ [J/s] = 1\ [N\ m\ /\ s]$. وعندما تُؤثر قوةٌ ما على جسيم، تكون القدرة المبذولة لهذا الجسيم

$$P = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

أو كحاصل الضرب القياسي

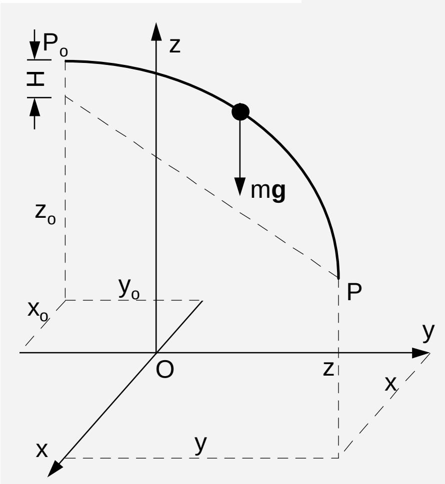
$$P = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{v} \qquad 19.5$$

ويأتي هذا التعريف مباشرة من تعريف الشغل، معادلة 12.5.

3.4.5 أمثلة على حساب الشُغل

شــغل قــوة الــجــاذبــيــة

إذا تحرك جسيم ما، وزنه **mg** من الموضع الابتدائي P_o إلى الموضع P، **شكل** 5.5، فإن الشغل المبذول من قوة وزنه يتحــدد بالمعادلة 12.5. فالإزاحة المتناهية الصغر $d\mathbf{S} = d\mathbf{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}$، والقوة المؤثرة $\mathbf{F} = -mg\,\boldsymbol{k}$. وعليه نكتب الشغل المبذول من قوة وزنه على الصورة التالية



شكل 5.5

$$A = \int_{P_0}^{P} (-mg\,\boldsymbol{k}) \cdot (dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k})$$

$$= -mg \int_{z_0}^{z} dz$$

$$A = mg\,(z_o - z)$$

أو

$$A = mg\,H$$

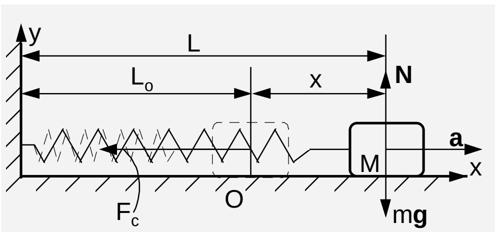
ولأن موقع نقطتي البداية P_o والنهاية P اعتباطيان، فإن فرق ارتفاعهما H يمكن أن يتحدد كأي قيمةٍ، موجبة أو سالبة أو حتى صفراً. ولذلك فالشغل الفعلي لقوة الوزن يمكن أن يأخذ الشكل

$$A = \pm\, mg\,H \qquad 20.5$$

تكون فيه الإشارة سالبــةً عند اكتساب ارتفاع، وموجبةً عند فقدانه. وحيث إن الشغل المبذول من قوة الوزن، معادلة 20.5 لا يعتمد على شكل المسار، فإن قوة الوزن تُعتبر قوة مــحافظــة.

شــغل الــقــوة الــمــرنــة في زنبرك

إذا كان طول الزنـــبرك غير المشدود (وضع الاستقرار) L_o، وشُدَّ الزنبرك من طرفه الأيمن بواسطة الثقل M، وزنه **mg**، حتى استطال الزنبرك وأصبح طوله L، **شكل** 6.5. عندئذٍ تؤثر على الثقل قوة (شَدًّ) الزنبرك المرنة $\mathbf{F}_c$ لليسار. هذه القوة (المرنة) تتناسب طردياً مع الاستطالة x، حيث ثابت التناسب هو معامل مرونة الزنبرك c، الذي يساوي القوة اللازمة لإزاحة طرف الزنبرك وَحْدَة مسافة، بينما اتجاه هذه القوة دائما نحو وضع الاستقرار



شكل 6.5

$$\mathbf{F}_c = -c\,(L - L_o)\,\boldsymbol{i} = -c\,x\,\boldsymbol{i}$$

من جهة أخرى، تعرف الإزاحة الأولية $d\mathbf{S}$ في المعادلة 12.5 للزنبرك بالعلاقة $d\mathbf{S} = dx\,\boldsymbol{i}$. وعليه نُعَرِّف الشغل الكلي للقوة المرنة بالتكامل

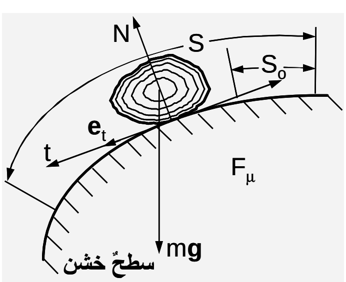
$$A = \int_{L_o}^{L} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\int_{0}^{x} c\,x\,\boldsymbol{i} \cdot dx\,\boldsymbol{i} = -c\int_{0}^{x} x\,dx$$

$$A = -\frac{c}{2}x^2 \qquad 21.5$$

أي أن شـــغل القوة المرنة المبذول عند اســـتطالة الزنبرك من الوضع الأولي (وضع الاستقرار) L_o، إلى الوضع L ، $x = L - L_o$، يساوي نصف حاصل ضرب معامل المرونة c بمربع الاستطالة x. وتعرف الاستطالة عدديا بمقدار التغير، الزيادة أو النقصان، في طول الزنبرك نتيجة التأثير عليه بقوة شدٍ أو ضغط. وهذا الشغل ، معادلة 21.5، يكون موجباً وسالباً بالاعتماد على وضعية الزنبرك عينه. فشدُّ الزنبرك من طرفه مبتعداً عن وضع الاستقرار يعني أن القوة المرنة في الزنبرك تَبْذُل شغلاً سالباً. وعند رجوع الزنبرك من وضع الشد إلى وضـــعـــه الأولي فإن القوة المرنة تبذل شغلاً موجباً. وكما ورد أعلاه، عند معرفة إشارة شغل قوة الجاذبية فإن شغل القوة المرنة يكون موجباً عندما يكون الزنبرك بوضعٍ يسير فيه نحو الاستقرار، أياً كان مشـــدوداً أم مضغوطاً، ويكون شغلُه سالباً عندما يكون فيه الزنبرك بوضعٍ يسير فيه نحو عدم الاستقرار. وحيث إن هذا الشغل لا يعتمد على شكل المسار الذي يتبعه الجسيم أثناء حركته ، فإن القوة المرنة قوةٌ محافظةٌ.

شغل قوة الاحتكاك الإنزلاقي

نفترض أن جسيماً، يتحرك على سطحٍ خشن في مسارٍ منحنٍ، **شكل** 7.5. القوى المؤثرة على الجســيم أثناء حركته، هي قوة وزنه **mg** للأسفل، قوة رد فعل السطح على الجسيم عموديـــاً على المماس باتجاه الحركة **N**، وقوة الاحتكاك المضادة للحركة، ومقدار هذه الإخيرة $\mathbf{F}_\mu = \mu\,\mathbf{N}$، حيث μ معامل الاحتكاك. ولحساب الشغل الكلي الذي تبذله قوة الاحتكاك، يُحسب التكامل المحدود، معادلة 12.5. فقوة الاحتكاك $\mathbf{F}_\mu = -\mu\,N\mathbf{e}_t$ بينما متجه الإزاحة $d\mathbf{S} = dS\,\mathbf{e}_t$ حيث إن $\mathbf{e}_t$ متجه الوحدة على امتداد الحركة



شكل 7.5

$$A = \int_{s_0}^{s} \mathbf{F}_\mu \cdot d\mathbf{S} = -\mu\int_{S_0}^{S} N\mathbf{e}_t \cdot dS\,\mathbf{e}_t = -\mu\int_{S_0}^{S} N\,dS \qquad 22.5$$

وكحالة خاصـــة إذا كانت قوة الاحتكاك ثابتة في المقدار والاتجاه $\mathbf{F}_\mu = const.$، فإن مــقــدار شُغــلـها الكلي

$$A = \mu N (S - S_o)$$

حيث أن $\Delta S = S - S_o$، طول قوس الحركة. ولأن قوة الاحتــكاك تعتمد على شكل المسار الذي يتبعه الجسيم أثناء حركتـــه، فإنها تُعتبر قوة غير محافظة.

5.5 قانون تغيُّر طاقة حركة الجسيم

إذا اعتبرنا جسيماً، كتلته m، يتحرك تحت تأثير القوة **F**، وبتسارع **a**. وأن معادلة حركته في الاتجاه المماس تعرف بالمعادلة 2.4.3 ، $m\mathbf{a}_t = \mathbf{F}_t$، حيث إن التسارع المماسي بدلالة السرعة والإزاحة $a_t = v\dfrac{dv}{dS}$، عندئذٍ تكون معادلة حركة هذا الجسيم هي

$$m\,v\frac{dv}{dS} = F_t$$

وبضرب طرفي هذه المعادلة في dS يكون

$$m\,v\,dv = F_t\,dS$$

وباستبدال الائتلاف $F_t\,dS$ بالشغل الأولي dA الذي أنجزته القوة F_t عند إزاحته الأولية dS، فإنه يمكن كتابة المعادلة الأخيرة بصيغةٍ أكثر اقتضاباً

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA \qquad 23.5$$

حيث تمثل الكميّة على اليسار معدّل تغير الطاقة الحركية. هذه المعادلة 23.5 تعرف قانون التغير في طاقة حركة الجسيم بصورة تفاضلية: **المشتـــقة الأولى لطاقة حركة الجسيم عند إزاحته إزاحةً ما تساوي الشغل الأولـــي المبذول من المتجه الرئيسي للقوى على هذا الجسيم خلال هذه الإزاحة**، أو بصيغةٍ أكثر اختصاراً **يساوي الشغل معدّل تَغيُّر الطاقة الحركية**. وبإجراء التكامل على طرفي المعادلة 23.5 وللنهايتين، الابتدائية A والنهائـــيـــة B يكون

$$\frac{1}{2}m v_B^2 - \frac{1}{2}m\,v_A^2 = A_{AB} \qquad 1.24.5$$

أو بصيغةٍ أخرى

$$T_B - T_A = A_{AB} \qquad 2.24.5$$

والتي تعرف قانون التغير في طاقة حركة الجسيم بصورةٍ تكاملية: **التغير في طاقة الحركة للجسيم عند إزاحته إزاحةً ما يساوي الشغل المبذول من المتجه الرئيسي للقوى على هذا الجسيم خلال هذه الإزاحة.**

ومن الطبيعي ملاحظة أن قيمتي الطاقة الحركية والشغل المبذول تكون موجبةً إذا كانت السرعة النهائـــيـــة أكبر من السرعة الابتدائية $v_B > v_A$، معادلات 24.5. وبصيغةٍ مكافئة، يكتسب الجسيم طاقةً حركية إضافية وشغله الكلي المبذول يكون موجباً إذا ازدادت سرعته. والعكس صحيح أيضاً.

إن المعادلات 23.5 و24.5 تسري حتى للحركة المقيدة . فالحركة المقيدة بقيودٍ مثاليةٍ، تتحدد باستبدال تأثير القيود بردود أفعالها العمودية على الحركة. وهذا يعطي شغلاً ذا قيمةٍ صفريةٍ، $\mathbf{N} \times d\mathbf{S} = 0$، أما القيود

الحقيقية فمن الضروري الأخذ بالحسبان قوة الاحتكاك الانزلاقي كإحدى القوى المؤثرة عند حساب الشغل الكلي المبذول على الجسيم، معادلة 22.5.

من جهةٍ أخرى، يمكن الربط بين قانوني تغير طاقة الجسيم، معادلة 2.24.5 وتغير طاقة الوضع، معادلة 16.5 لينتج أن

$$T_B - T_A = \Pi_A - \Pi_B \quad \& \quad T_A + \Pi_A = T_B + \Pi_B \qquad 25.5$$

حيث إن مجموع طاقة الوضع وطاقة الحركة لنفس الجسيم هو الطاقة الميكانيكية الكلية، $E = T + \Pi$، وهذه ثابتةٌ للجسيم المتحرك. هذه المعادلة 25.5 تمثل قانون (مبدأ) حفظ الطاقة الميكانيكية، والذي يُستخدم للأجسام التي تبذلُ شغلاً ناتجاً من مجال القوى المحافظ.

حــلُّ المسائل بواسطة قوانين الطاقة

يتم ذلك إذا عُرِفَت المسافة التي يقطعها الجسيم - إزاحته - وسرعته في الموقعين الابتدائـــي والنهائـــي. إن ذلك يكفل تحديد القوة (المسألـــة الأولى في الديناميكا)، مباشرةً من المعادلات 23.5 و 24.5.

أسـئـلــةٌ مــحــلــولــة

6.5 حـــــل الــمســـائـــل

يقوم حل مسائل ديناميكا الجسيم على تحديد القانون الذي يجب استخدامه للحالة المعينة. لقد عُرِّفت القوانين العامة لديناميكا الجسيم بثلاث مجموعاتٍ هي **قوانين الزخم**، البند 2.5، **قوانين الزَّخَم الزَّاويُّ**، البند 3.5 وأخيراً **قانوني تغير طـــاقـــة الحركة وحفظ الطاقة الميكانيكية**، البند 5.5.

ويمكن إجمال المسائل ونوعيتها تبعاً للقوانين الواردة أعلاه

1 - بواسطة **قوانين الزَّخَم**، **تغير الزَّخَم** معادلة 5.5 أو 6.5، **وحفظ الزَّخَم** معادلة 7.5 يمكن حل المســـائل التي تربط بين القوة، زمن الحركة والســـرجهتين الابتدائية والنهائية. وبالعادة تكون القوة إمَّا ثابتةً وإما دالة زمن.

2 - بواسطة **قوانين الزَّخَم الزَّاوِيِّ**، **تغير الزَّخَم الزَّاوِيِّ** معادلة 8.5 **وحفظ الزَّخَم الزَّاوِيِّ** معادلة 9.5 يمكن إيجاد حلول المسائل التي تربط بين كلٍ من القوة ومتَّجِه الموضع والسرجهتين الابتدائية والنهائية. وغالباً ما تكون القوة ثابتةً أو دالة موضعٍ فقط. ومن الســـهولة بمكان ملاحظة أن الفرق بين مجموعتي القوانين الواردة أعلاه هو تبادل المتغيرين زمن الحركة وموضع الجسيم الأماكن.

3 - وأخيراً، بواسطة **قوانين الطاقة**، **تَغَيُّر الطاقة الحركية**، معادلات 23.5 أو 24.5 **وحفظ الطاقة الميكانيكية** معادلة 25.5، يمكن إيجاد حلول المسائل التي تربط بين القوة، متَّجِه الإزاحة والسرجهتين الابتدائية والنهائية. وغالباً ما تكون القوة ثابتةً أو دالة إزاحة فقط.

ويمكن حل المسائل المعقدة أكثر، بالربط بين مجموعتي قوانين أو أكثر في آنٍ واحد. إن الربط بين مجموعتي القوانين، **الزَّخَم** و**الزَّخَم الزَّاويُّ** يضمن إيجاد المتغيرات، القوة، زمن الحركة والسرجهتين الابتدائية والنهائية بالإضافة إلى متَّجِه الموضع. كما أن الربط بين مجموعتي القوانين، **الزَّخَم** و**الطاقة** يضمن إيجاد المتغيرات، القوة، زمن الحركة والسرجهتين الابتدائية والنهائية بالإضافة إلى متَّجِه الإزاحة. وأخيراً يحدد الربط بين مجموعتي القوانين، **الزَّخَم الزَّاويُّ** و**الطاقة** المتغيرات، القوة، متَّجِه الموضع والسرجهتين الابتدائية والنهائية بالإضافة إلى متَّجِه الإزاحة.

أسـئـلـــة مـــحـــلولـــة

الباب السادس

.... أما نظرية نيوتن للجاذبية، فرغم كونها ناقصة بالنسبة إلى المسافات الشاسعة والسرعات العالية، تبقى ملائمة تماماً للنظام الشمسي. ويظهر المذنب هالي وفقاً لتنبؤ نظرية نيوتن بالضبط عن الجاذبية، ولقوانينه في الحركة. كما يرتكز نظام الصواريخ كلياً على قوانين نيوتن. وقد وصلت المركبة فوياجر 2 إلى أورانوس، بفارق ثانية واحدة فقط عن الوقت المحدد سابقاً، كما لم تبطل النسبية أياً من هذه الأمور.

إسحق عظيموف، **نسبية الظلال**، بيروت: أكاديميا، 1992، ص 236.

حركة الجسيم تحت تاثير القوة المركزية Central Force Motion

1.6 القوة المركزية، قانون المساحات Central Force, Law of Areas

تعرف القوة التي يمر خط عملها دائماً بمركزٍ معلوم بالقوة المركزية. وتعتبر قوى جذب الشمس للكواكب التي تدور حولها، وقوة جذب الأرض للقمر والأقمار الصناعية التي تدور في فلكها، وقوة جذب الإلكترون نحو المركز الذري، وكذلك القوة التي تجذب الأيون إلى الشحنة النووية، أمثلةً على القوى المركزية. ومن الأهمية بمكان دراسة القوى المركزية التي يكون مقدراها معتمداً على المسافة أو مُتَّجِهِ الموضع، بين الكتل المجذوبة أو المتنافرة ومركز تأثير القوة، والتي يمكن كتابتها رياضياً بالصيغة التالية

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(r)$$

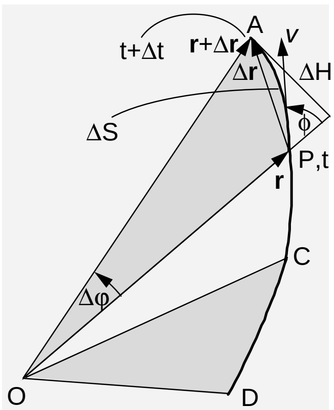
وباختيار نقطة الأصل عند مركز تأثير القوة، يكون مُتَّجِهُ الموضع ومُتَّجِهُ القوة إمَّا متوازيين وإمَّا متوازيين عكسياً. وفي كلتا الحالتين، يكون عزم القوة حول المركز مساوياً للصفر

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

لذلك، يكون الزَّخم الزّاويُّ ثابتاً بالنسبة إلى مركز تأثير القوة، استناداً إلى قانون حفظ الزّخم الزّاويّ، معادلة 9.5

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\boldsymbol{v} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \text{const} \qquad 1.6$$



شكل 1.6

ويمثل حفظ الزَّخَمُ الزَّاويُّ لوَحْدة الكتلة، المعادلة 1.6، أهمَّ خاصيةٍ لحركة الأجسام تحت تأثير القوة المركزية. ولدراسة الحركة في مجال قوة جذبٍ من مركزٍ ثابت، نعتبر حركة الجسيم، كتلته الوَحْدة، والمتحرك على المسار DA تحت تأثير قوة الجذب من المركز الثابت O، **شكل** 1.6. فعند لحظة معينة t، يمُرُّ الجسيم بالنقطة P، على بعد r من المركز O، ومتحركاً بالسرجهة $\boldsymbol{v}$. وبعد فترة زمنية قصيرةً جداً Δt، يصل الجسيم إلى النقطة A. عندئذٍ يمكن تقريب القطعة القوسية PA، القوس $\Delta S = PA$، كخط مستقيم يجتازه الجسيم بسرعةٍ ثابتةٍ، مقدارها v. أي أن

$$\Delta S = v\,\Delta t$$

مساحة المثلث OPA تساوي نصف حاصل الضرب الإتجاهي للمتّجهين $\mathbf{r}$ و $\Delta\mathbf{r}$

$$\Delta A = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}\right| \quad \Rightarrow \quad \Delta A = \frac{1}{2} r\,\Delta H \qquad 2.6$$

وباستبدال $\Delta H = \Delta S \sin\phi$ نكتب المساحة ومعادلة 2.6

$$\Delta A = \frac{1}{2} r\,v\,\Delta t \sin\phi$$

حيث ϕ الزاوية المحصورة بين المتجهين $\mathbf{r}$ و $\boldsymbol{v}$، وتمثل قيمة انحراف الحركة (السرجهة) عن الرأسي. وبعد قسمة الطرفين على الفترة الزمنية Δt يكون

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r\,v \sin\phi \qquad 3.6$$

وباستخدام صيغة النهاية $\Delta t \to 0$ نحصل على مشتقة (معدل تَغَيُّرِ) المساحة

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r\,v \sin\phi}{2}$$

حيث يظهر في يمين هذه المعادلة نِصْفُ الائتلاف $r\,v \sin\phi$ الذي يظهر في المعادلة 1.3.5، عند تعريف الزَّخَمِ الزَّاوِيّ لوَحْدَة الكتلة بالنســبة إلى مركز تأثير القوة O

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

وهو مقدارٌ ثابت لأن L = ثابت، معادلة 1.6. إذا رمزنا لهذا الثابت بالرمز h

$$\frac{L}{2m} = \text{const.} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = h \qquad 4.6$$

فإن السرعة المساحية Areal Speed، أو معدل تَغَيُّرِ المساحة - المعدل الذي تُمْسَح به المساحة - يساوي الزَّخَمُ الزَّاوِيّ للجســيم مقســوماً على ضِعفِ كتلته. وقيمة هذا المقدار h ثابتةٌ لحركة أي جسيمٍ في مجالٍ جاذبي. أي أن قيمته عند لحظة ما تُســــاوي قيمتَه عند أية لحظة أخرى على نفس المسار. وعلى ذلك، ففي **الشكل** 1.6، مثلاً، إذا كانت الفترتان الزمنيتان اللّتان يستغرقهما الجسيم/الجرم السماوي في قطع جزأي المدار DC و PA متساويتين، فإننا نســتنتج من تســاوي مساحتي القطاعين ODC و OPA أن ســرعة الجســيم من D إلى C أكبر منها بالضرورة من P إلى A.

2.6 معادلة مسار الجسيم تحت تأثير القوة المركزية

تتحدد حركة الجسيم تحت تأثير قوةٍ جذبٍ وحيدةٍ، تتناسب عكسياً مع مربع المسافة في مستوىً واحدٍ مكون من المتجهين **r** و ***v***. ولذلك يتواجد متَّجِه التسارع في نفس مستوى الحركة. ولدراسة حركة هذا الجسيم ننطلق من المعادلات التفاضلية للحركة في الإحداثيات القطبية 3.4.3 لوَحْدَةِ الكتلة، مستبدلين التسارعين النِّصْفُقطري والمُسْتَعْرِض بقيمهما من المعادلتين 40.2

$$\frac{F_\varphi}{m}=a_\varphi=r\ddot{\phi}+2\dot{r}\dot{\phi} \qquad 1.5.6$$

$$\frac{F_r}{m}=a_r=\ddot{r}-r\dot{\phi}^2 \qquad 2.5.6$$

وبينما تساوي القوة المُسْتَعْرِضَة صفراً، $F_\varphi=0$، تتحدد القوة النِّصْفُقْطْرِية من قانون الجذب العام $F_r=-\frac{mgR^2}{r^2}$.

ولذلك، تُكتب المعادلات 5.6 بالشكل التالي

$$r\ddot{\phi}+2\dot{r}\dot{\phi}=0 \qquad 1.6.6$$

$$\ddot{r}-r\dot{\phi}^2=-\frac{gR^2}{r^2} \qquad 2.6.6$$

إن تحليل المعادلة 1.6.6 يظهر أنه يمكن كتابتها كمشتقة أولى بدلالة r و $\dot{\phi}$

$$\frac{d(r^2\dot{\phi})}{dt}=0$$

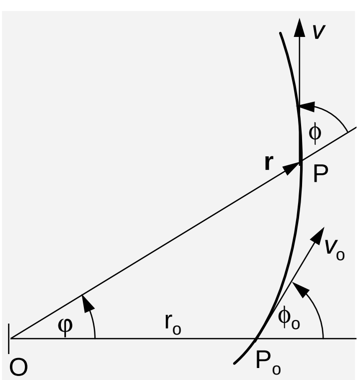
أو متكاملة (بعد إجراء التكامل)

$$r^2\dot{\phi}=\text{const.} \qquad 1.7.6$$

وتحسب قيمة هذا الثابت من الشروط الابتدائية للحركة، **شكل** 2.6

$$t=t_o \rightarrow \quad r=r_o\ ,\ v=v_o\ ,$$

$$\&\quad \phi=\phi_o\ \ \&\ \ \varphi=\varphi_o=0$$



شكل 2.6

فنكتب المعادلة 1.7.6

$$r^2\dot{\phi}=r_o^2\dot{\phi}_o=r_o\,v_o\sin\phi_o=2h \qquad 2.7.6$$

إذ يُمَثِّلُ الثابت 2h لحظتها زخماً زاوياً لوَحْدَةِ الكتلة . من جهة أخرى ، تعتبر المعادلة 2.6.6 معادلةٌ تفاضلية غير خطية بدلالة المتغير المستقل، الزمن. ويفضل حلها مباشرةً بدلالة إحداثياتها القطبية r و φ. لذلك، حتى نَتَخَطّى صعوباتٍ قد تظهر، نستبدل الزمن بمتغير مستقلٍ آخر هو الزاوية القطبية φ، ونفترض المتغير الجديد

$$r=\frac{1}{u} \qquad 8.6$$

لنجد من معادلة 2.7.6 أن

$$\dot{\phi}=2hu^2 \qquad 9.6$$

نحسب مشتقة الموضع الأولى

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{d\varphi} = \dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} = 2hu^2 \times -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}$$

$$\dot{r} = -2h\frac{du}{d\varphi}$$

المشتقة الثانية

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\dot{r}}{d\varphi} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{r}}{d\varphi} = 2hu^2\frac{d}{d\varphi}\left\{-2h\frac{du}{d\varphi}\right\}$$

$$\ddot{r} = -4h^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2} \qquad 10.6$$

إذا عوضنا المعادلات 8.6 - 10.6 في المعادلة 2.6.6 فإننا نحصل على المعادلة

$$-\ 4h^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}\ -\ 4h^2u^3 = \ -\ gR^2u^2$$

أو بشكلٍ أكثر اختصاراً

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{P} \qquad 11.6$$

حيث استبدلنا ثابت عدم التجانس الناتج بثابتٍ آخر

$$\frac{1}{P} = \frac{gR^2}{4h^2} \qquad 12.6$$

المعادلة التفاضلية 11.6 الممثلة لمسار الجسيم تحت تأثير قوة الجاذبية بدلالة u، هي معادلة تفاضلية خطّية، غير متجانسة وذات معاملاتٍ ثابتةٍ من الرتبة الثانية، والزاوية القطبية φ هي المتغير المطلق لها. ويتطلب حلُّها إيجاد قيمة u بدلالة الزاوية القطبية φ. ولذلك، يتكون الحلُّ من الحلَّين العام والخاص

$$u \ = \ u_h \ + \ u_p$$

حيث u_h الحل العام general للمعادلة المتجانسة $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$، و u_p الحل الخاص particular للمعادلة الكاملة وغير المتجانسة 11.6. وحيث أن معامل u في المعادلة المذكورة موجب، يكتب الحل العام بدلالة جيب تمام فرق الزاوية

$$u_h = A\cos(\varphi - \alpha) \qquad 1.13.6$$

حيث A، α ثابتي التكامل. يمثل A الاتساع الذي يصله u_h أو u، بينما تمثل α زاوية الطور الابتدائية. أما الحل الخاص للمعادلة 11.6 فيعرف كثابت k

$$u_p \ = \ k \qquad 2.13.6$$

ولذلك، يؤول حل المعادلة 11.6 إلى مجموع الحلين السابقين، المعادلتان 13.6

$$u \ = \ A\cos(\varphi \ - \alpha) \ + \ k \qquad 14.6$$

ولإيجاد ثوابت التكامل المذكور أعلاه A، α و k، نحسب المشتقات الأولى والثانية للمتغير u أو $\frac{1}{r}$ بدلالة المتغير المطلق φ من المعادلة الرئيسية 14.6 عند بداية الحركة $t = t_0 = 0$

$$\frac{du}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} = -A\sin(\varphi - \alpha)\Big|_{\varphi=0} = \ A\sin\alpha \qquad 15.6$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}\Big|_{\varphi=0} = -A\cos(\varphi-\alpha)\Big|_{\varphi=0} = -A\cos\alpha \tag{16.6}$$

لكن ، مشتقة u الأولى بدلالة الزاوية φ

$$\left.\frac{du}{d\varphi}\right|_{t=0} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{t=0} = -\frac{1}{r^2}\left.\frac{dr}{d\varphi}\right|_{t=0} = -\frac{1}{r_o^2}\left.\frac{\dot{r}_o}{\dot{\phi}_o}\right|_{t=0} = -\frac{1}{r_o \tan\varphi_o} \tag{17.6}$$

ومشتقتها الثانية بدلالة الزاوية φ من معادلة 11.6

$$\left.\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{P}-\left.\frac{1}{r}\right|_{t=0} = \frac{1}{P}-\frac{1}{r_o} \tag{18.6}$$

ولينتج من ربط كلٍ من العلاقات 15.6 و 17.6 وكذلك 16.6 و 18.6 أن المعادلتين

$$A\sin\alpha = -\frac{1}{r_o\tan\phi_o} \tag{19.6}$$

$$A\cos\alpha = \frac{1}{r_o}-\frac{1}{P} \tag{20.6}$$

تنطويان على مجهولين α و A. وتأتي قِيَمُ هذين المجهولين مع قليلٍ من الاختصار كالتالي: زاوية الطَّوْرِ الابتدائية α

$$\tan\alpha = \frac{P}{\tan\phi_o(r_o-P)} \tag{21.6}$$

أما الاتساع A

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{r_o}\right)^2+\frac{1}{r_o^2\ \tan^2\phi_o}} \tag{22.6}$$

وإذا استبدلنا في المعادلة 11.6 كلاً من ، $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$ بقيمتها من المعادلة 16.6، و u بقيمتها من المعادلة 14.6، نجد أنّ قيمة الثابت k

$$k = \frac{1}{P} \tag{23.6}$$

وبناءً على ما ورد، يمكن كتابة حل المعادلة 11.6، أو المعادلة 14.6 بأي من الشكلين التاليين

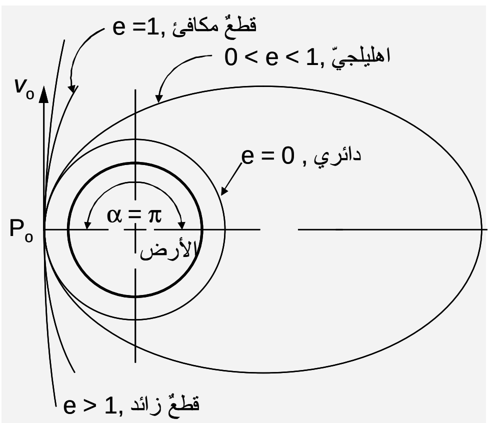
$$u = A\cos(\varphi-\alpha)+\frac{1}{P} \tag{1.24.6}$$

أو

$$r = \frac{P}{1+e\cos\psi} \tag{2.24.6}$$

ذلك أنهما يمثلان في الهندسة التحليلية معادلة القَطْعِ المخروطي[1] Conic Section بدلالة البعد البؤري Semilatus Rectum، رمزهُ P، الزاوية ψ والاختلاف المركزي Eccentricity للمسار، رمزهُ e، $e = PA$، والمعبر عنهم في الإحداثيات القطبية التي ينطبق قطبها O على إحدى بؤرتي القطع المخروطي. وعلى ذلك، فعندما تكون $\psi = \varphi - \alpha = 0, \pi$، يكون للمقام في المعادلة 2.24.6 وبالتالي للمقدار r نهايتين صغرى وعظمى بالترتيب.

أما في الهندسة الفضائية فتعرِّف المعادلتان 24.6 مسار Orbit Equation الجرم السماوي أو المركبة الفضائية بدلالة الإحداثيات القطبية r و φ، والشروط الابتدائية التي تظهر في الثابتين e و P. ويتحكم بارامتر البعد البؤري في حجم القطع المخروطي و يمثل قيمة r عندما تكون $\psi=\pm\pi/2$، بينما يحدد الاختلاف المركزي شكل المسار الذي يتبعه الجسيم. واستناداً إلى المعادلتين 24.6، و**الشكل** 3.6 يكون المسار



شكل 3.6

أ - دائرياً إذا كانت قيمة الاختلاف المركزي مساويةً للصفر e=0.

ب - قَطْعَاً ناقصاً، إهليلجياً إذا كانت قيمة الاختلاف المركزي موجبةً وأقل من واحد0<e<1.

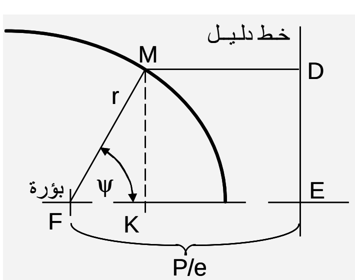
ج - قَطْعَاً مكافئاً ، إذا كانت قيمة الاختلاف المركزي مساوية لواحد e=1.

د - قَطْعَاً زائداً ، إذا كانت قيمة الاختلاف المركزي أكبر من واحد e>1.

ومن المهم تحديد مسار الجسيم المنطلق في السماء بدلالة الشروط الابتدائية الأساسية للحركة كسرعة انطلاقه الابتدائية v_o، وزاوية الطور الابتدائية α. لذلك ، تجب معرفة قيمة البعد البؤري P، معادلة 12.6 بدلالة تلك الشروط. فنستبدل قيمة h في المعادلة المذكورة بقيمتها من 2.7.6

$$P = \frac{(2h)^2}{gR^2} = \frac{r_o^2\, v_o^2\, \sin^2\phi_o}{g\,R^2} \qquad 25.6$$

وهذه بتعويضها في المعادلة 2.24.6 وللزاوية φ=0 و ψ=α، ثمَّ حلِّ الناتج



القطع المخروطي

[1] يعرف القطع المخروطي في الهندسة بأنَّهُ المَحَلُّ الهندسي locus لجميع نقاط المستوى التي تكون نسبة بعدها عن نقطةٍ ما ثابتةٍ إلى بعدها عن خطٍ مستقيمٍ ثابت واحدة. وبينما تُدعى النقطة بالبؤرة Focus يُدعى الخط المستقيم بالخط الدليل Directrix. كما يدعى ثابت النسبة بالاختلاف المركزي للقطع المخروطي.

$$\frac{FM}{DM} = e \;\Rightarrow\; \frac{r}{P/e - r\cos\psi} = e$$

ومن المعادلة الأخيرة نحصل على معادلة القطع المخروطي 2.24.6.

$$e\cos\alpha = \frac{r_o v_o^2\, \sin^2\phi_o - gR^2}{gR^2} \qquad 26.6$$

من جهةٍ أخرى، فإن ضربُ طرفي المعادلة 19.6 في P ينتج

$$e \sin \alpha = -\frac{r_o v_o^2 \sin 2\phi_o}{2 g R^2} \qquad 27.6$$

وبحل المعادلتين 26.6 و 27.6 نحصل على زاوية الطور الابتدائية α

$$\tan \alpha = \frac{v_o^2 \sin 2\phi_o}{2\left[g \frac{R^2}{r_o} - v_o^2 \sin^2 \phi_o \right]} \qquad 28.6$$

أما قيمة الاختلاف المركزي فتكون

$$e = \sqrt{\frac{r_o v_o^2 \sin^2 \phi_o \left[r_o v_o^2 - 2gR^2 \right]}{g^2 R^4} + 1} \qquad 29.6$$

المعادلة 28.6 تعرف الزاوية α، التي تحدد موضع نقطة الإقلاع بالنسبة لمحور تماثل المسار، بينما تعطي المعادلة 29.6 قيمة الاختلاف المركزي للمسار. وإذا ما انطلقت مركبة فضائية من سطح الأرض، $r_o = R$ و $\phi_o = 90^o$، فإن قيمة الاختلاف المركزي

$$e = \sqrt{\frac{v_o^2 \sin^2 \phi_o \left[v_o^2 - 2gR \right]}{g^2 R^2} + 1} \qquad 1.29.6$$

وتبعاً لذلك، فإن شكل المسار يكون

أ -دائرياً عندما تكون $v_o = \sqrt{gR}$.

ب- قَطْعَاً ناقصاً عندما تكون $\sqrt{gR} < v_o < \sqrt{2gR}$.

ج- قَطْعَاً مكافئا عندما تكون $v_o = \sqrt{2gR}$.

د- قَطْعَاً زائداً عندما تكون $v_o > \sqrt{2gR}$.

ويطلق على السرعة $v_c = \sqrt{gR}$ تعبير السرعة الدائرية أو السرعة الفضائية الأولى. وهي ال**سرعة اللازمة لانطلاق جسيم (مركبةٍ فضائية) من سطح الأرض للدوران حول الأرض بمدارٍ دائري**. وهي أقل سرعةٍ ممكنةٍ لجسم حتى يتغلب على الجاذبية الأرضية ويتحول إلى قمرٍ صناعيٍ يدور حول الأرض. كما يطلق على السرعة $v_{esc} = \sqrt{2gR}$، تعبير السرعة الفضائية الثانية أو **سرعة الإفلات** Escape Speed، وهي **السرعة اللازمة لانطلاق جسيمٍ (مركبةٍ فضائية) من سطح الأرض للإفلات من جاذبيتها والدوران (حولها) بمدارات قطعٍ مكافئةٍ**. وبالعادة ، يتحرك الجسم المنطلق بالسرعة $v_o \geq \sqrt{2gR}$ في مدار قطعٍ مكافئ أو قطعٍ زائد، مبتعداً بلا حدود عن الأرض. وعندئذٍ يصبح قمراً صناعياً يتبع جِرْمَاً سماوياً آخر غير الأرض. وبالتعويض بدل $g = 9.8$ [m/s] ونصف قطر الأرض $R = 6370$ [km]، تكون

$$v_c = \sqrt{gR} = 7.9 \text{ [km/s]}, \quad v_{esc} = \sqrt{2gR} = 11.2 \text{ [km/s]} \qquad 30.6$$

ولهذا فَلِكَي يُصبح جسمٌ مقذوفٌ من سطح الأرض قمراً تابعاً يدور حولها، لا بد من توفر الشرطين التاليين: أولاً $7.9 \text{ [km/s]} \leq v_o < 11.2 \text{ [km/s]}$ وثانياً $\phi_o = 90°$.

لقد لاحظنا فيما سبق كيف أن مسار الجسيم (والجرم السماوي) في الفضاء يتحدد دون معرفة سرعته أو حتى تغيرها على المسار. لذلك نحتاج إلى مزيد من المعلومات الضـــرورية، نستقيها من قانون تغير طاقة حركة الجسيم لوحدة الكتلة، معادلة 24.5، مع تغيير الرموز T_A و T_B إلى T_o و T على التوالي

$$\frac{A_{o1}}{m} = \frac{1}{m}\left[T - T_o \right] = \frac{v^2}{2} - \frac{v_o^2}{2} \qquad 1.31.6$$

ويتحدد الشغل المبذول على وحدةِ كتلةٍ، لانتقالها من موضعها الابتدائي P_o إلى الموضع النهائي P على نفس المسار، **شكل** 2.6، بسالب الفرق بين طاقتي الوضع، معادلة 16.5

$$\Pi_o - \Pi = \frac{A_{o1}}{m} = -\, gR^2 \left\{ \frac{1}{r_o} - \frac{1}{r} \right\} \qquad 2.31.6$$

وبربط المعادلتين الأخيرتين، ينتج عنه بعد ترتيبهما أن

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_o^2}{2} = -\, gR^2 \left\{ \frac{1}{r_o} - \frac{1}{r} \right\} \Rightarrow \frac{v_o^2}{2} - \frac{gR^2}{r_o} = \frac{v^2}{2} - \frac{gR^2}{r}$$

أو بشكلٍ عام

$$\frac{v^2}{2} - \frac{gR^2}{r} = \text{const.} \qquad 32.6$$

هذا الثابت يُعرف ببارامتر الطاقة Energy Parameter لكل وَحْدَة كتلة، رمزه E_u، ويحدِد مستوى الطاقة في الموضع المعين، ويحسب من الشروط الابتدائية للحركة

$$E_u = \frac{r_o v_o^2 - 2gR^2}{2 r_o} = \frac{1}{2} v_o^2 - \frac{gR^2}{r_o} \qquad 33.6$$

وباستبدال $[\, r_o v_o^2 - 2gR^2]$ في المعادلة 29.6 بـــ $2 r_o E_u$، مع الأخذ بعين الاعتبار قيمة الثابت h من المعادلة 25.6 نحصل على الاختلاف المركزي بدلالة بارامتر الطاقة

$$e = \sqrt{2\, \frac{r_o^2\, v_o^2 \sin^2 \phi_o}{g^2\, R^4}\, E_u + 1} \qquad 34.6$$

وعلى هذا الأساس، يعتبر مستوى الطاقة، ممثلاً ببارامتره E_u مؤشراً مباشراً على شكل المسار الذي يتبعه الجسيم المقذوف في الفضاء (من حول الأرض، مثلاً). وللمركبة الفضائية المنطلقة من سطح الأرض، $r_o =$ R و $\phi_o = 90^o$، يكون المسار

أ- دائرياً عندما يكون $e = 0$ وبارامتر الطاقة كمية سالبة $E_u = -\frac{1}{2}\frac{g^2 R^2}{v_o^2}$.

ب- قَطْعَاً ناقصاً عندما يكون $0 < e < 1$ وبارامتر الطاقة كمية سالبة محددة؛ أي $0 > E_u > -\frac{1}{2}\frac{g^2\ R^2}{v_o^2}$.

ج- قَطْعَاً مكافئاً عندما يكون $e = 1$ وبارامتر الطاقة صفراً $E_u = 0$.

د- قَطْعَاً زائداً عندما يكون $e > 1$ وبارامتر الطاقة كمية موجبة $E_u > 0$.

3.6 قوانين كبلر للحركة الكوكبية Kepler's Laws of Planetary Motion [2]

قانون كبلر الأول

المسار الذي يخطه كل كوكب هو قطعٌ ناقصٌ، مع وجود الشمس في إحدى بؤرتيه. لقد تبين لنا ذلك رياضياً من المعادلتين القطبيتين 24.6. فالجسيم يتبع مداراً إهليلجياً فقط عندما تَتْبَع قوته المركزية قانون التربيع العكسي بالإضافة إلى شروطٍ ابتدائيةٍ يجب تَوَفُرَها في الحركة. وحيث أننا نتعامل مع كواكبَ سيارةٍ تتحرك في الفضاء حول الشمس ، وتتأثر بقوة جاذبية تتبع قانون التربيع العكسي، فإن مسارات هذه الكواكب ستكون إهليلجيةً تقع الشمس في إحدى بؤرتيها.

لقد صاغ **كبلر** قانونه الأول للكواكب فقط. وجاء بعده **نيوتن** ليثبت ذلك رياضياً مستنداً إلى قانونه الثاني وقانون الجذب العام. إذ استنتج **نيوتن** من قانون كبلر الأول قاعدة تقول: القوة المركزية التي تجذب الكوكب إلى الشمس قوةٌ مكافئةٌ لقانون التربيع العكسي، وبصورةٍ مكافئةٍ مسار الكوكب الاهليلجيّ ناتجٌ من قوة التربيع العكسي. وفي الواقع، فقد أثبت **نيوتن** أن جميع المسارات الممكنة للكواكب والأجرام السماوية هي قُطوعٌ مخروطية. إذ يستطيع الكوكب أو الكويكب Asteroid أو المذنب Comet أو الشهاب Meteor أو حتى النيزك Meteorite ذو الطاقة الكافية الحركة في مسارٍ دائري أو إهليلجيّ، بل وحتى الإفلات من النظام الشمسيّ، بإتباع مسارٍ مكافئ أو حتى زائديّ.

يجب الانتباه إلى أن قانونَ كبلر الأول هو قانونٌ هندسي بحت، يختص فقط بالسِّمَة المكانية للمدار الكوكبي، وليس بالزمان أو السرعة أو حتى أي مفهومٍ آخر. ومع ذلك، فكم كان الانجاز عظيماً بعد ألفي سنةٍ أو أكثر، من الاقتناع البشري بالمدار الدائري ! يأتي **كبلر** وبعبارة واحدة: **الكواكب تتحرك في مدارات إهليلجية،** ليبسِّطَ إلى أبعد الحدود صورة النظام الشمسي، وفي نفس الوقت لِيُحَقِقَ توافقاً بين المشاهدة والحسابات الهندسية.

قانون كبلر الثاني

لقد حاول **كبلر** استخدام فرضية المدار البيضاويّ Oval Orbit كمقياسٍ لسرعة الكوكب. فافترض أن كلاً من قوة جذب الكوكب وسرعته تتناسبان عكسياً مع المسافة، ونجح في اثبات التناسب العكسي بين السرعة والمسافة. وقد قاده هذا إلى فكرةٍ جديدةٍ عن الحركة الكوكبية، مفادُها أنّ **مساحاتٍ متساويةٍ تُمْسَح في أوقاتٍ متساويةٍ** والذي يعرف اليوم **بقانون المساحات** - أو قانون كبلر الثاني. مثال ذلك ، في غضونِ يومٍ واحد، يمسح خطُّ مدار الأرض منطقةً ضيقةً مثلثةَ الشكل، يقع رأسها عند مركز الشمس وقاعدتها على امتداد المدار، وتكون مساحة هذا المثلث هي نفسها كل يومٍ في السَّنة. وهكذا ، فحين تكون الأرض أقرب إلى الشمس، فإنها يجب أن

---

[2] أعلن **كبلر** قانونه الأول عام 1605 وقانونه الثاني عام 1609، إذ نشرهما في كتابٍ واحد هو **علم الفلك الجديد** Astronomica Nova، الصادر في براغ عاصمة تشيكيا اليوم، ثُمَّ أعلن قانونه الثالث عام 1619 ضمن كتاب **هارمونية العالم** Harmonice Munde، الصادر في لانس Linze، في فرنسا اليوم.

تتحرك أسرع كي تحدد مثلثاً بنفس المساحة. بل إن سرعتها تزداد في الحقيقة إلى درجةٍ كافيةٍ بالضبط للإبقاء على زخمها الزَّاويُّ ثابتاً. وبالتالي تَمَكّنَّا من اشتقاق قانون المساحات كنتيجةٍ بسيطة لقانون حفظ الزَّخَمِ الزَّاوِيّ، معادلة 1.6

$$\mathbf{r} \times \boldsymbol{v} = \text{const.} \qquad 1.35.6$$

والواقع أن مفهوم الزَّخمِ الزَّاويّ لم يُعرف في الميكانيكا إلا بعد اكتشافات **كبلر** بأكثر من قرنٍ من الزمن، ولم يبد كواحد من صفوة مفاهيم الميكانيكا الأساسية إلا مع استهلال الصياغات الرياضية في القرن التاسع عشر. ويعتبر قانون الزخم الزّاويّ للحركة الكوكبية، معادلة 35.6 واحداً من قوانين الحفظ الفذة في الميكانيكا، مع أن **كبلر** نفسه أخفق في إدراك ذلك على هذا المستوى. وشأن القانون الأول، فإن قانون كبلر الثاني قانونٌ هندسي، ينطبق على كلِّ مدارٍ بمفرده، ولا يُشَكِّل أيَّ صلةٍ مع المدارات الأخرى.

وكما أشرنا في بند 1.6، فإن تطبيق قانون المساحات يكون بصورة خاصة عند نقطتي أكبر وأصغر بعدٍ للكوكب عن الشمس، أو عن أي مركز آخر للقوة. فعند هاتين النقطتين يكون حاصل ضرب السرعة والمسافة الشعاعية ثابتاً

$$v_A\, r_A = v_P\, r_P \qquad 35.6$$

إذ يشير الرمزان السفليان A و P إلى نقطة الأوج Apogee ونقطة الحضيض Perigee للمدار على التوالي. وإذا كانت الأرض هي الكوكب قيد الدراسة، فإن البعد الحضيضي لمدارها $r_P = 1.47\times 10^{11}$ [m]، بيما البعد الأوجي $r_A = 1.52\times 10^{11}$ [m]. وعلى هذا الأساس، فإن النسبة بين أكبر سرعة للأرض (عند الحضيض) وأصغر سرعة (عند الأوج) هي

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1.52 \times 10^{11}\,[\text{m}]}{1.47 \times 10^{11}\,[\text{m}]} = 1.034$$

وكما هو ملاحظ، يعالج قانون كبلر الثاني النسب بين السرعات فحسب. ولذلك، لا يمكن تحديد السرعة عند أي نقطة على المدار، ما لم تكن السرعة عند نقطة أخرى قد أضحت معروفة. هذا وتتراوح سرعة الأرض المقيسة

$$r_P \times \omega_{ES} < v_E < r_A \times \omega_{ES}$$

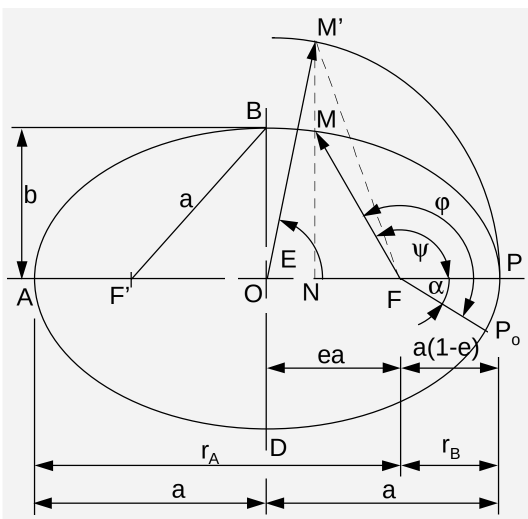
$$1.47\times 10^{11} \times 1.99 \times 10^{-7} < v_E < 1.52 \times 10^{11} \times 1.99 \times 10^{-7}$$

$$2.93\times 10^{4}\ [\text{m/s}] < v_E < 3.02 \times 10^{4}\ [\text{m/s}]$$

قانون كبلر الثالث

سعى **كبلر** لسنواتٍ عديدةٍ لاستكمال قانونيه الأول والثاني بثالثٍ يربط مداراً كوكبياً بآخر. فمنذ عهد **كوبرنيكس** Copernicus، كان معروفاً أن دورات الكواكب الأبعد عن الشمس تكون أكبر. وكان **كبلر** أول من أوجد العلاقة المقدارية بين الأزمنة والمسافات. إذ بينما كان يحاول إيجاد أبعاد الكواكب ومدى دقتها اكتشف بمحض الصدفة قانونه الثالث الذي ينص: **دورة الكوكب تتناسب طردياً مع الجذر التربيعي لمكعب المحور النصف الرئيسي لمداره**. ونستطيع الآن الاستعانة بالمعادلة 2.24.6 لاشتقاق هذه العلاقة بسهولة ويسر.

لقد أثبتنا في البند 2.6 أن مسار الجسيم المتحرك تحت تأثير قوة الجاذبية سيكون منحنىً مغلقاً لكل القيم التي تكون فيها قيمة الاختلاف المركزي موجبة وأقل من واحد $0 \le e < 1$. فمدار الكوكب يكون دائرياً عند $e=0$، وإهليلجياً عند $0<e<1$، وبالتالي لن يؤول المقام في المعادلة 2.24.6 إلى الصفر لأية زاوية ψ، قيمتها المطلقة أقل من قائمة $|\psi| < 90°$. لنفترض أن مدار كوكبٍ معينٍ حول الشمس محددٌ بالمسار الاهليلجيّ، **شكل** 4.6، حيث تقع الشمس في البؤرة F. ولنحدد الشروط الكينماتيكية التالية: يكون الكوكب في اللحظة الابتدائية $t_o=0$ في الموضع الابتدائي P_o، والمحددة بالزاوية α عن محور التماثل. كما يصنع الزاوية φ عند وصوله إلى الموضع الموسوم بالنقطة M.



شكل 4.6

النقطة P تمثل أقربَ نقطةٍ على المدار حول الشمس يصلها الكوكب أثناء حركته، ولذلك تسمى بنقطة الحضيض. وبعدها عن مركز الشمس (البؤرة) يمثل البعد الحضيضي Perihelion Distance ورمزه r_P. أما النقطة A فتمثل أبعد نقطةٍ على المدار نفسه، يصلها الكوكب أثناء حركته حول الشمس وتسمى بنقطة الأَوْج. ويسمى البعد من نقطة الأوج إلى مركز الشمس بالبعد الأوجي Aphelion Distance، رمزه r_A. ولإيجاد قيمتي البعدين الحضيضي والأوجي للقطع الناقص، **شكل** 4.6، نحسب قيمتي r من المعادلة 2.24.6 وللزاويتين $\psi = 0°$ و $\psi = 180°$. البعد الحضيضي

$$r_P = r|_{\psi=0} = \frac{P}{1+e} \quad \Rightarrow \quad r_P = a\,(1 - e) \qquad 1.36.6$$

حيث أن a المحور نصف الرئيسي Semimajor Axis و b المحور نصف الثانوي Semiminor Axis. البعد الأوجي

$$r_A = r|_{\psi=180} = \frac{P}{1-e} \quad \Rightarrow \quad r_A = a\,(1 + e) \qquad 2.36.6$$

ومنهما يتحدد البعد البؤري

$$P = a\,(1 - e^2) \qquad 37.6$$

من جهةٍ أخرى ، يعطي معدل تغير المساحة ، معادلة 4.6 وبعد تكامله دورة الكوكب T

$$A_e = h\,T \quad \Rightarrow \quad T = A_e / h \qquad 38.6$$

حيث A_e مساحة القطع الناقص، $A_e=\pi ab$، بينما h نصف وَحْدَة الزّخم الزّاويّ، $h^2 = g R^2 P/4$ ومنها $h^2 = g R^2 a\,(1-e^2)/4$. لذلك نكتب دورة الكوكب

$$T = \frac{2\pi a b}{\sqrt{g R^2 a(1-e^2)}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{gR^2}} \qquad 39.6$$

حيث أن $b = a\sqrt{(1-e^2)}$. ولمعرفة العلاقة بين الزمن المستنفد والموقع الذي وصله الكوكب (الجرم السماوي أو حتى القمر الصناعي) بالنسبة للشمس/للأرض، ننطلق من الحقيقة أننا نقيس الزمن من نقطة الحضيض كنقطة بداية الحركة. وكما هو معروف من قانون كبلر الثاني يمسح الخط الشعاعي للكوكب الفراغ بمعدلٍ ثابت. ولهذا؛ فالخط الشعاعي FM'، **شكل** 4.6، يمسح مســـاحات متســـاوية من الدائرة في أوقاتٍ متساوية. وانطلاقاً من مبادئ الرسم الهندسي للقطع الناقص والدائرة يعتبر الخط FM في القطع الناقص ABPD مســـقطاً للخط FM' في الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها OA على مســـتوى المدار. ورياضياً فإن

$$\frac{MN}{b} = \frac{M'N}{a}$$

وبالتالي فالمساحات الناتجة من مسح الخط الشعاعيFM' على المسار الدائري (بدءً من P) تنكمش لتنتج مساحاتٍ أخرى ناتجة من مسح الخط الشعاعي FM على المسار الإهليلجي. ومعامل الانكماش هو النسبة بين المحورين نصف الثانوي ونصف الرئيسي، أي $\frac{b}{a}$. إذا افترضنا أن الزمن الذي يستغرقه الكوكب حتى الوصول إلى M' هو t، فإن المساحة الممسوحة من الخط الشعاعي FM' خلال تلك الفترة الزمنية هي $\frac{t}{T}$ من المساحة الإجمالية للدائرة (الممسوحة خلال دورة الجرم السماوي T). وهذه مساويةٌ بالتمام لمساحة قطاع الدائرة الذي رأسه O وزاوية رأسه E [3] مطروحاً منه مساحة المثلث OM'F. ولهذا نكتب

$$\frac{\pi a^2}{T} t = \frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} a^2 e \sin E \qquad 40.6$$

أخيراً، باستبدال T في المعادلة 40.6 بقيمتها من المعادلة 39.6 وحل الناتج بدلالة الزمن المستنفد نجد أن

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{gR^2}}\,(E - e\sin E) \qquad 41.6$$

[3] تعرف الزاوية E في الميكانيكا الفضائية بالبعد الزَّاويّ Eccentric Anomaly أو الزاوية التي تحدد موقع جرم سماوي نسبة للشمس على دائرة الشكل الاهليلجي. وتحدد قيمتها بإحدى العلاقتين

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin\psi}{1+e\cos\psi} \quad \& \quad \tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\tan\frac{\psi}{2}$$

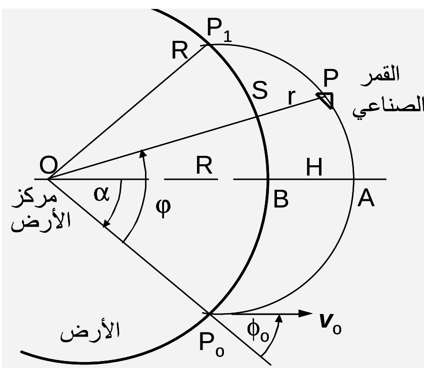
لمزيد من المعلومات انظر

Greenwood,T.,D.:*Principles of Dynamics*. pp 208 - 209.

4.6 الأقمار الصناعية والمسارات الإهليلجية Satellites and Elliptical Orbits

تتحرك الأقمار الصناعية حول الأرض طبقاً لتأثير قوة الجاذبية. هذه القوة تكون مساوية لوزن الجسم في الموضع الابتدائي على سطح الأرض. ويتم تعريف حركة القمر الصناعي عن طريق حل المعادلة التفاضلية 11.6، وذلك بإيجاد معادلة مساره بدلالة الزاوية القطبية φ والشروط الابتدائية ψ، α، $\boldsymbol{v}_o$ و $r=r(\varphi,v_o,\phi_o,\alpha,\psi)$. وتُعتَبر معرفة أقل سرعةٍ ابتدائيةٍ ممكنة ، وأفضل قيم للزوايا α و ϕ_o للحصول على مسار معين من المسائل المهمة في الميكانيكا الفضائية اليوم. إن تحديد المسار يتطلب إيجاد أقصى ارتفاع ممكن H ومعرفة زمن الطيران اللازم T_f، والمدى الذي يقطعه الصاروخ S.

لقد أثبتنا أن مسار الجسم يكون إهليلجياً إذا قُذِفَ بسرعة ابتدائية تتراوح قيمتها بين السرعة الفضائية الأولى والثانية $\sqrt{gR} < v_o \leq \sqrt{2gR}$، وبالزوايا $\phi_o=\pi/2$ و $\alpha=\pi$، **شكل** 4.6. هذا الإثبات تمَّ استنتاجه من العلاقتين 26.6، 27.6. هذه الحالة الخاصة جداً ، تجعل من المستحيل عملياً اطلاق جسمٍ - قمر صناعي - من سطح الأرض بسرجهةٍ أفقية. بل تتم العملية بإطلاقه بواسطة صاروخ موجّهٍ أرْضيّاً يرفعه إلى ارتفاع معين، ثم يُطلَق من هناك بالسرجهة والزاوية المحددتين.



شكل 5.6

بناءً على ما تَقَدم، يكون مسار الجسم المقذوف مغلقاً حول الأرض دون الارتطام بها، ليدعى قمراً صناعياً. أمَّا إذا ارتطم الجسم المقذوف بالأرض، عندئذٍ ينتقل الجسم من موقعٍ ما إلى آخر، مكوِّناً مساراً إهليلجياً ليسمى لحظتئذٍ بالصاروخ العابر للقارات أو البعيد المدى، القوس P_oAP_1، **شكل** 5.6. ويتحدد مدى الصاروخ المقذوف من الموضع الابتدائي P_o، إلى الموضع P_1 بالقوس P_oBP_1. أو رياضياً

$$S = 2R\alpha \qquad 42.6$$

حيث الزاوية α محددة حسب المعادلة 28.6، و R المتوسط الحسابي لنصف قطر الأرض. ويتحدد أقصى ارتفاعٍ يصله الصاروخ في اللحظة التي تكون فيها الزاويتان α و φ متســـاويتين، وذلك كالفرق بين r_A و R. فطبقاً للمعادلة 36.6، يخضع أقصى ارتفاع للمعادلة التالية

$$H = r_A - R = \frac{P}{1-e} - R$$

وباستبدال بارامتر البعد البؤري P من المعادلة 25.6 للحالة $r_o=R$، نحصل على الارتفاع

$$H = \frac{v_o^2 \sin^2\phi_o}{(1-e)\,g} - R \qquad 43.6$$

حيث تتحدد قيمة الاختلاف المركزي e من المعادلة 1.29.6. بناءً على ما ورد أعلاه، يمكن بمعرفة السرعة الابتدائية v_o، وزاوية انحراف سرجهة الإقلاع عن الخط العمودي ϕ_o، أن نُعَيِّن مدى الصاروخ S، معادلة 42.6 وارتفاعه الأقصى H، معادلة 43.6.

ومن الأهمية بمكان من وجهة النظر العملية والعلمية تعيين أقل سرعة ممكنة للانطلاق من سطح الأرض $v_{o\,min}$، وأنسب زاوية قذف يصل الصاروخ بمقتضاهما إلى مداه المطلوب. لهذا الغرض نحسب قيمة السرعة الابتدائية من المعادلة 28.6، عندما تكون $r_o=R$

$$v_o = \sqrt{\frac{2Rg\tan\alpha}{\sin 2\phi_o + 2\sin^2\phi_o \tan\alpha}} \qquad 44.6$$

هذه المعادلة تبين أن السرعة الابتدائية تعتمد على الزاوية ϕ_o المعبر عنها في المقام. وتُحْسَب أقل سرعة ممكنة للصاروخ عندما يصل المقام إلى نهايته العظمى. ورياضياً يعني ذلك

$$\frac{d}{d\phi_o}\left[\sin 2\phi_o + 2\sin^2\phi_o \tan\alpha\right] = 0$$

$$2\cos 2\phi_o + 2\sin 2\phi_o \tan\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tan\alpha = -\cot 2\phi_o$$

حلّ هذه المعادلة بدلالة ϕ_o يكون

$$\phi_o = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \qquad 45.6$$

وباستبدال ϕ_o في المعادلة 44.6 بقيمتها من المعادلة 45.6 نجد أن أقل قيمة للسرعة تتحدد رياضياً

$$v_{omin} = \sqrt{\frac{2Rg\sin\alpha}{\sin\alpha - 1}} \qquad 46.6$$

حــل المسائل

يقوم حل مسائل الحركة تحت تأثير القوة المركزية على اختيار المعادلة أو القانون المعين من مجموعة معادلات أو قوانين تبعاً للمعطيات المرفقة بالمسألة قيد البحث. وتتحدد مميزاتها بما يلي

1 - **الجسم يتحرك في مستوى واحد**، لأن زخمه الزّاوي ثابتٌ، معادلة 35.6، وتبعاً لذلك تكون سرعة الجسم القطاعية ثابتة، معادلة 4.6.

2- **مسار الجسم المتحرك قطعٌ مخروطي**، المعادلات 24.6.

ولذلك، فلمعرفة مسار الجسم المتحرك تأثير القوة المركزية، نحدد قيمة الاختلاف المركزي e بأيٍ من المعادلات 29.6 أو 34.6، أو حتى هندسياً من معادلات القطع المخروطي. وفي جميع الحالات تتحدد الخصائص الهندسية للمسار كالسرجهة والتموضع من المعادلات 35.6 - 37.6 أو حتى المعادلة 35.6. كما تتحدد دورة المدار والزمن المستنفد من المعادلتين 39.6 و 41.6.

معلومات فلكية

الكوكب		عطارد Mercury	الزُّهَرة Venus	الأرض Earth	المريخ Mars	المشتري Jupiter	زحل Saturn	أورانوس Uranus	نبتون Neptune	بلوتو Pluto
الاختلاف المركزي	e	0.2056	0.0068	0.0167	0.0934	0.0485	0.056	0.047	0.009	0.249
متوسط بعد الكوكب عن الشمس	بالأمتار $\times 10^{10}$	5.79	10.8	14.96	22.79	77.83	142.7	286.96	449.66	590
	بالوُحدات الفلكية	0.387	0.723	1	1.524	5.204	9.539	19.18	30.20	39.4
دورة الكوكب حول الشمس	بالأيّام	88	224.7	365.26	687					
	بالسنوات الأرضية	0.241	0.615	1.0	1.881	11.86	29.46	84.01	164.8	247.7
تسارع الجاذبية	متر/ثانية تربيع	3.7	8.8	9.8	3.76	24	10	10	14	3
سرعة الكوكب المدارية	كيلومتر/ثانية	47.9	35	29.8	24.1	13.1	9.6	6.8	5.4	4.7

الوحدة الفلكية Astronomical Unit AU: متوسط بعد الأرض عن الشمس ويساوي 1.496×10^{11} متراً.

نصف قطر الأرض 6372 كيلومتراً، تقريباً 6.37×10^{6} متراً. نصف قطر الشمس 6.96×10^{5} كيلومتراً. نصف قطر القمر 1738 كيلومتراً.

ثابت الجاذبية ويساوي 6.67×10^{-11} متر تكعيب لكل كيلو غرام لكل ثانية تربيع، $G = 6.67 \times 10^{-11}\ [m^3/kgs^2]$، $gR^2 = GM_E = 3.98 \times 10^{5}\ [m^3/s^2]$.

دورة الأرض حول نفسها 23 ساعة و56 دقيقة و 4 ثواني، دورة القمر حول الأرض 27.32 يوم، متوسط بعد القمر عن الأرض 384400 كيلومتراً.

كتلة الأرض 5.79×10^{24} كيلو غرام $M_E = 5.97 \times 10^{24}$ [kg].

كتلة القمر 7.35×10^{22} كيلو غرام $M_M = 7.35 \times 10^{22}$ [kg].

كتلة الشمس 1.99×10^{33} كيلو غرام $M_S = 1.99 \times 10^{33}$ [kg].

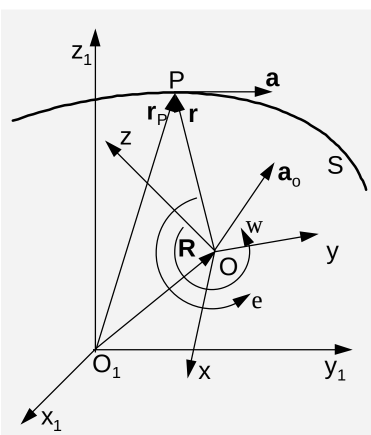
الباب السابع

حركة الجسيم النسبية RELATIVE MOTION OF A PARTICLE

1.7 المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم النسبية

بحثنا في الأبواب السابقة حركتي الجسيم الحرة والمقيدة، وذلك بالاعتماد على قوانين نيوتن والقوانين المستنبطة منها. وقد أدركنا أن استخدام قوانين نيوتن يستلزم الحركة المطلقة فقط؛ أي الحركة بالنسبة لإطار إسنادٍ قصوري.

هذا الباب سنُخَصِّصه لدراسة حركة الجسيم بالنسبة لأُطُرِ إسنادٍ متحركةٍ اعتباطياً (لنقل بتسارعٍ معين) بالنسبة لأطرِ إسنادٍ قصورية، **شكل** 1.7. عندئذٍ، ندعو حركة الجسيم المذكور (العامة) بالنسبة لأُطُرِ الإسناد المتحركة Oxyz الحركة النسبية للجسيم.



شكل 1.7

لنتخيل إطار الإسناد Oxyz الذي يتحرك بشكلٍ ما بالنسبة لإطارِ الإسناد الثابت $Ox_1y_1z_1$. أي أنه في كلٍّ لحظةٍ زمنية يكون معلوماً لدينا التسارع المطلق $\mathbf{a}_o$ للنقطة O، السَرْجَهةُ الزَّاوِيِّة w، والتَسارُعُ الزَّاوِيُّ e لإطار الإسناد المتحرك (الجسم المتحرك) بالنسبة لإطار الإسناد الثابت. إذا تحددت للجسيم P محصلة القوى المؤثرة عليه بالمتَّجِه **F**، وتحددت الشروط الابتدائية لحركته بالنسبة لإطار الإسنادِ المتحرك أيضاً، فإن مسألة ديناميكا الجسيم النسبية تتحدد بتكوين المعادلة التفاضلية للحركة النسبية للجسيم P ومن ثم حلها (أي إجراء تكاملها). فمن قانون نيوتن الثاني نكتب معادلة حركة الجسيم (المطلقة) P

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \qquad 2.3$$

حيث إن **a** متَّجِه التسارع المطلق للجسيمP. وكما هو معروفٌ من الكَيْنَمَاتيكا، يساوي التسارع المطلق محصلة مركباته المكتسبة والنسبية والكوريوليسية، معادلة 97.2

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_{r} + \mathbf{a}_{cor} \qquad 97.2$$

لنحصل بعد تعويض هذه المركبات في المعادلة 2.3 وحل الناتج بدلالة $m\mathbf{a}_r$ أن

$$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{tr} - m\,\mathbf{a}_{cor}$$

وإذا دعونا الكميات المتَّجِهة $-m\mathbf{a}_{tr}$ و $-m\mathbf{a}_{cor}$ بقوتي القصور المكتسبة $\mathbf{F}_{tr,in}$ والقصور الكوريوليسية $\mathbf{F}_{cor,in}$ على الترتيب ، وذلك قياساً على المعادلة 48.4، فإن استبدال هذه القوى المستحدثـــةِ في المعادلة السابقة يمكننا من كتابتها بالشكل الجديد

$$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{tr,in} + \mathbf{F}_{cor,in} \qquad 1.7$$

لتدعى بالمعادلة التفاضلية لحركة الجسيم النسبية. وهي شبيهةٌ للمعادلة 2.3 للحركة المطلقة إذا أضيفت قوتا القصور المكتسبة والقصور الكوريوليسية إلى القوة **F** المؤثرة على الجسيم، وذلك نتيجةً للتأثير الناتج من الحركة المكتسبة. وسندرس بعض الحالات الخاصة التالية:

1- حركة إطار الإسناد المتحرك دورانية، عندئذ يتكون التسارع المكتسب من المركبتين النِّصْقطرِية a_{trt} والمماسية a_{trn}، $a_{tr} = a_{trn} + a_{trt}$. ولتؤول المعادلة الأخيرة إلى

$$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{trn,in} + \mathbf{F}_{trt,in} + \mathbf{F}_{cor,in} \qquad 1.1.7$$

وإذا كانت الحركة الدورانية المكتسبة منتظمة، تكون السرعة الزاوية ثابتةً $\omega_{tr} = const.$، عندئذٍ يكافيء التسارع المكتسب التسارع العمودي فقط، $a_{tr} = a_{trn}$. والمعادلة 1.1.7 تصبح

$$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{trn,in} + \mathbf{F}_{cor,in} \qquad 2.1.7$$

2 - حركةُ إطارِ الإسنادِ المتحرك انتقالية غير منتظمة وفي خطٍ منحنٍ. عندئذ تكون السرعة الزاوية المكتسبة صفراً، $w_{tr} = 0$، وتبعاً لذلك، يتلاشى كلاً من التسارعين المكتسب (العمودي)، أي $\mathbf{a}_{trn,in} = 0$، والكوريوليسي، أي $\mathbf{a}_{cor}= 0 \Leftarrow \mathbf{F}_{trn,in} = \mathbf{F}_{cor,in} = 0$. ولتؤول المعادلة 1.7 إلى

$$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{trt,in} \qquad 3.1.7$$

أخيراً، إذا كانت حركة إطار الإسناد المتحرك انتقالية، منتظمة وفي خط مستقيم، عندئذ يكون $a_{tr} = 0$ لأن $w_{tr} = 0$، و $a_{cor} = 0$. وتؤول المعادلة 1.7 إلى

$$m\,\mathbf{a}_r = \mathbf{F} \qquad 4.1.7$$

والتي تكافيء المعادلة الاتجاهية 2.3 لحركة نفس الجسيم تحت تأثير القوة بالنسبة لإطار إسنادٍ قصوري. إن هذا يعني أن قوانين الحركة واحدة في سائر أطر الإسناد القصورية، حيث أدرك هذا **نيوتن** و**غاليلو** من قبله. ودُعي هذا المبدأ باسم الأخير مبدأ النسبية الغاليلية Principle of Galilean Relativity. إن هذا لا يعني أن وصف حركة ما سيكون متطابقاً في سائرِ أُطُرِ الإسناد المختلفة بل سيكون واحداً، فقط في أُطُرِ الإسناد القصورية المختلفة.

2.7 الإستقرار (السكون) النِّسْبيّ على سطح الأرض

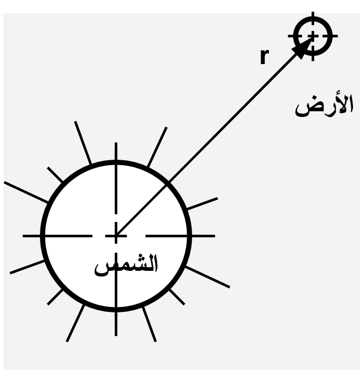
يعتبر الجسم حال سكونه (عدم حركته) على سطح الأرض مستقراً نسبياً دون اعتبارٍ لدوران الأرض حول محورها وحول الشمس. كما يعتبر نفس الجسم السابق في حالاتٍ أخرى متحركاً لاكتسابه حركة الأرض الدورانية حول محورها. لقد كان اختيار موقعَ إطارِ الإسنادِ القصوري الفيصل في تحديد قيمة وأهمية دوران الأرض حول محورها وحول الشمس. إذ تنطوي حركة الأرض على تعقيداتٍ كثيرةٍ عند بحثها بالنسبة لإطار إسنادٍ قصوري مثالي [1].

ولذا، يتكون تسارع الجسم الملامس لسطح الأرض من عدة مركبات: إحداها المركبة الناتجة من حركة المجرة التي تنتمي إليها الأرض، ومركبة أخرى من تسارع الشمس، وثالثة من دوران الأرض حول الشمس. وهذه الأخيرة هي الأكبر بين المذكورة أعلاه. إن حساب قيمة تسارع سطح الأرض يتطلب تخيلَ مركزَ شمسنا لا يتسارع، إذ نعتبره نقطة أصلٍ لإطار إسنادٍ قصوري، فيدور متجه موضع الأرض حول الشمس دورةً واحدةً كل عام، **شكل** 2.7. ولذا، فسرعته الزَّاوِيَّة

$$\omega_{ES} = \frac{1[\text{rev.}]}{1[\text{year}]} \times \frac{2\pi}{1[\text{rev.}]} \times \frac{1[\text{rad}]}{1[\text{s}]} \times \frac{1[\text{year}]}{365\,[\text{day}]} \times \frac{1[\text{day}]}{24\,[\text{hr}]} \times \frac{1[\text{hr}]}{3600\,[\text{s}]}$$

$$\omega_{ES} = 1.99\times10^{-7}\ [\text{rad./s}]$$

حيث يشير الرمزان السُّفْلِيَّان ES لدوران الأرض حول الشمس. إذا افترضنا أن السرعة الزاوية لدوران الأرض حول الشمس ثابتة، فإن تسارعها أثناء حركتها في مسارٍ إهليلجيٍ حول الشمس يساوي التسارع العمودي فقط



شكل 2.7

$$a = \rho\,\omega_{ES}^2 = 1.49\times10^{11}\ [\text{m}] \times 1.99\times10^{-7}\ [\text{rad./s}]$$

$$a = 5.9\times10^{-3}\ [\text{m/s}^2]$$

أو كنسبة 0.06 % من تسارع الجاذبية الأرضية. لذا، من السهولة بمكان شطبُ هذا التســـارع من حســـابات أغلب المسائل الهندسية أثناء الحركة على سطح الأرض أو قريباً منها. من جهة أخرى، عند حل بعض المسائل المتعلقة بالفضاء، كدورانِ مركبة فضائية حول الشمس، أو إفلات أخرى من مجال جاذبيتها، حيث يتطلب الأمر دقةً أكبر من ذي قبل، من الضروري حساب هذه التسارعات وعدم إلغائها.

وحتى نأخذ فكرةً جليةً عن استقرار جسيم ما على سطح الأرض، مع دورانها حول نفسها وحول الشمس، من الضروري اختيار إطاري إسنادٍ أحدهما ثابتٌ ، تَتَطابَقُ نقطةُ أصله O_1 مع مركز الأرض، وآخرٌ متحركٌ، تتطابق نقطة أصله O مع موقع الجسيم على سطح الأرض، **شكل** 3.7. حركة إطار الإسناد المتحرك دورانيةً منتظمةً (حركة الأرض حول محورها)، وذات سرعة زاوية ثابتةٍ مقداراها دورةً واحدةً يومياً.

[1] إطار الإسناد القصوري المثالي هو الإطارُ الذي يتطابق مركزه مع مركز الكون.

$$\omega = \omega_{EE} = \frac{2\pi\ [rad.]}{1[day]} = \frac{2\pi\ [rad.]}{86164[s]} = 7.29 \times 10^{-5}\ [rad./s]$$

حيث يشير الرمزان السفليان EE لدوران الأرض حول محورها[2]. وإذا كان الجسيم ملامساً لسطح الأرض ولا يفارقه، فإن سرجهته النسبية تساوي الصفر، $\boldsymbol{v}_r = 0$. ولذلك ، فكل من مركبتي التسارع النِّسبيَّة والكوريوليسية تساويان الصفر $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_{cor} = 0$. والمعادلة 1.7 تكتب بالشكل التالي

$$m\mathbf{a}_{tr} = \mathbf{F} \qquad 2.7$$

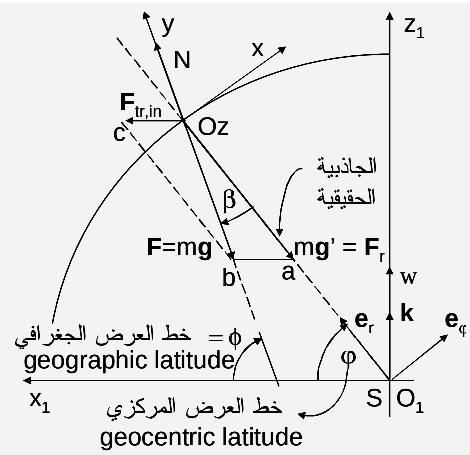
التي تمثل المعادلة الاتجاهية لاستقرار الجسيم على سطح الأرض. إن استقرار الجسيم المعين يعني عملياً أنه ملازم لموقع محددٍ على سطح الأرض، لا يفارقه، ويدور مع الأرض وبها. وهذا سر بقاء المركبة المكتسبة للتسارع الناتجة من دوران الأرض حول محورها ضمن معادلة الاستقرار التي تُحسب إتجاهياً كحاصل الضرب الإتجاهي المضاعف

$$\mathbf{a}_{tr} = \mathrm{w} \times (\mathrm{w} \times \mathbf{r}) \qquad 3.7$$

حيث يتحدد تموضع الجسيم بالنسبة إلى مركز الأرض بالمتَّجِه $\mathbf{r}$، $\mathbf{r} = R\mathbf{e}_r$، وتعرف السرجهة الزاوية لدوران الأرض كمتَّجِهٍ منطبقٍ على المحور جنوب شمال NS، $\mathrm{w} = \omega\boldsymbol{k}$، **شكل** 3.7، أو بدلالة الوَحَدَات الاتِّجَاهيَّة القطبية $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\varphi$

$$\mathrm{w} = \omega\cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \omega\sin\varphi\,\mathbf{e}_r \qquad 4.7$$

حيث φ الزاوية التي تحدد خط العرض المركزي Geocentric Latitude للموقع O على سطح الأرض، بينما الزاوية ϕ فتحدد خط العرض الجغرافي Geographic Latitude لنفس الموقع O. وإذا استبدلنا السرجهة الزاوية، w، في المعادلة 3.7 بقيمتها من المعادلة 4.7، فإن التسارع المكتسب يصبح



شكل 3.7

$$\mathbf{a}_{tr} = \mathrm{w}\times(\mathrm{w}\times\mathbf{r}) = R\,\omega^2\{\sin\varphi\cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi - \cos^2\varphi\,\mathbf{e}_r\} \qquad 5.7$$

القوى المؤثرة على الجسيم الملامس لسطح الأرض هي قوتان: قوة جذب الأرض للجسيم، اتجاهها نحو مركز الأرض

$$\mathbf{F}_r = m\,\mathbf{g}' = -\,mg'\,\mathbf{e}_r \qquad 1.6.7$$

[2] تدعى الفترة الزمنية اللازمة لدوران الأرض حول محورها دورةً واحدةً في أطر إسنادٍ قصورية، بالنســبة إلى المجرة التي تنتمي لها باليوم الفلكي Sidereal Day، وهي تســاوي 23 ساعة و56 دقيقة و4 ثواني؛ أي 86164 ثانية. أمَّا اليوم الشمسي Solar Day فهو أطول قليلاً، إذ يلزم أيضاً 3 دقائق و56 ثانية فقط؛ أي 24 ساعةً لنقطةٍ على الأرض لكي تعود إلى نفس الموضع نسبةً إلى الشمس.

و(قوة) رد فعل الأرض على الجسيم، اتجاهها شاقولياً للأعلى، وهي مساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه لقوة الوزن

$$\mathbf{N} = m\,\mathbf{g} = mg \cos\beta\,\mathbf{e}_r + mg \sin\beta\,\mathbf{e}_\varphi \qquad 2.6.7$$

حيث β الزاوية التي تحدد انحراف متَّجِه موضع الجسيم عن الخط الشاقولي في ذلك الموقع. المتَّجِهُ الرئيسي للقوى المؤثرة على الجسيم الملامس لسطح الأرض

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_r = -\,mg'\,\mathbf{e}_r + mg \cos\beta\,\mathbf{e}_r + mg \sin\beta\,\mathbf{e}_\varphi \qquad 7.7$$

وباستبدال متجه التسارع المكتسب $\mathbf{a}_{tr}$، من المعادلة 5.7، واستبدال المتجه الرئيسي للقوى **F** من المعادلة 7.7، تؤول المعادلة 2.7 إلى الشكل التالي

$$m R\omega^2\{\sin\varphi \cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi - \cos^2\varphi\,\mathbf{e}_r\} = -\,mg'\mathbf{e}_r + mg\cos\beta\mathbf{e}_r + mg \sin\beta\,\mathbf{e}_\varphi \qquad 8.7$$

والمكافئة للمعادلتين القياسيتين

$$m R\,\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi = mg \sin\beta \qquad 1.8.7$$

$$-\,m R\omega^2 \cos^2\varphi = -\,mg' + mg\cos\beta \qquad 2.8.7$$

نحسب من المعادلة الأولى الزاوية β

$$\beta = \arcsin\left\{\frac{R\,\omega^2 \sin 2\varphi}{2\,g}\right\}$$

$$\beta_{max} = \beta\Big|_{\varphi=45^o} = \arcsin\left\{\frac{R\,\omega^2}{2\,g}\right\} = 0.1\ [\ ^o\ ]$$

أي أن أقصى انحرافٍ للجسم المتحرك يبلغه عندما تكون زاوية الخطِّ الجغرافي φ= 45° [3]. وباستبدال $\cos\beta_{max} = 1$ في المعادلة، وقسمة طرفي المعادلة المذكورة على الكمية القياسية m، نجد قيمة الانحراف (التفاوت) في التسارع الأرضي

$$\Delta g = g - g' = R\,\omega^2 \cos^2\varphi \qquad 9.7$$

التي تعتمد على زاوية خط العرض ممثلةً في الزاوية φ. هذا الانحراف يبلغُ أقصى قيمةٍ له عندما تكون الزاوية φ = 0؛ أي عند خط الاستواء

$$\Delta g\big|_{max} = g - g' = R\,\omega^2$$

$$\Delta g\big|_{max} = 637\times10^4\ [m] \times \{\,7.29\times10^{-5}\ [rad./s]\}^2 = 0.0338\ [m/s^2] \qquad 1.9.7$$

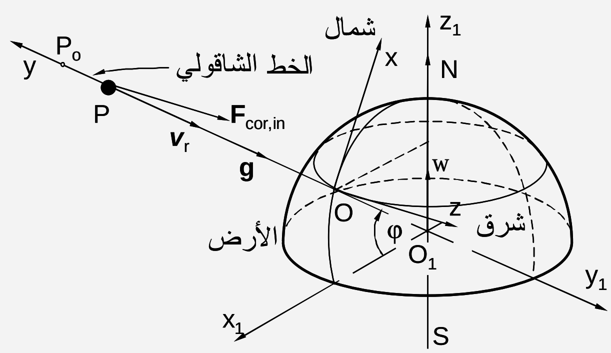
أو كنسبة 0.345% من تسارع الجاذبية الأرضية.

[3] من الآن فصاعداً نذكر خط العرض Latitude فقط دونما ذكرٍ لنوعه.

3.7 انحراف المقذوفات The Projectiles Displacement

القوة الوحيدة المؤثرة على المقذوفة عند حركتها بالقرب من سطح الأرض هي قوة جذب الأرض لها $\mathbf{F}_r = m\,\mathbf{g}'$. وإذا أضفنا إليها قوة القصور المكتسبة $\mathbf{F}_{tr,in}$ الناتجة من دوران الأرض حول محورها، فإنّ القوتين المذكورتين تُشكلان معاً قوة الوزن $m\mathbf{g}$، $m\mathbf{g} = m\mathbf{g}' + \mathbf{F}_{tr,in}$، **شكل** 4.7، وانظر أيضاً متوازي الأضلاع abcO، **شكل** 3.7. وباستبدال $\mathbf{F} = m\,\mathbf{g}$ وأيضاً $\mathbf{F}_{cor,in} = 2\,m\,w\times \boldsymbol{v}_r$ في المعادلة 1.7 (انظر المعادلة 96.2) يكون

$$m\,\mathbf{a}_r = m\,\mathbf{g} - 2\,m\,w\times \boldsymbol{v}_r$$



شكل 4.7

وباختصار الكتلة m من الطرفين

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{g} - 2\,w\times \boldsymbol{v}_r \qquad 10.7$$

التي تمثل المعادلة الاتجاهية التفاضلية لحركة الجسيم على سطح الأرض. وتُعرف المعادلة 10.7 في بعض المراجع والديناميكا الفضائية بالأخص بالمعادلة الباليستية Ballistic Equation. لحلها نعتمد المتجهات

$$\mathbf{a}_r = \ddot{x}\,\boldsymbol{i} + \ddot{y}\,\boldsymbol{j} + \ddot{z}\,\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{g} = -\,g\,\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_r = \dot{x}\,\boldsymbol{i} + \dot{y}\,\boldsymbol{j} + \dot{z}\,\boldsymbol{k}$$

$$w = \omega\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \omega\sin\varphi\,\boldsymbol{j}$$

حيث تكون المعادلات الأخيرة صحيحةً فقط للقيم $\beta_{max} \cong 0$، إذ أن $\phi = \varphi + \beta$. وبتعويض المعادلات الثلاث في المعادلة 10.7

$$\ddot{x}\,\boldsymbol{i} + \ddot{y}\,\boldsymbol{j} + \ddot{z}\,\boldsymbol{k} = -\,g\,\boldsymbol{j} - 2\,\omega \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \qquad 11.7$$

أو ثلاث معادلات قياسية بدلالة مركبات التسارع النسبي

$$\ddot{x} = -\,2\,\omega\,\dot{z}\,\sin\varphi$$

$$\ddot{y} = -g + 2\,\omega\,\dot{z}\,\cos\varphi \qquad 12.7$$

$$\ddot{z} = 2\,\omega\,(\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi)$$

والتي يعطي تكاملها (معادلات 12.7) ثلاث معادلات قياسية لمركبات السرعة

$$\dot{x} = -\,2\,\omega\, z \sin\varphi + C_1$$
$$\dot{y} = -g\,t + 2\,\omega\, z \cos\varphi + C_2 \qquad 13.7$$
$$\dot{z} = 2\,\omega\,(x \sin\varphi - y \cos\varphi) + C_3$$

المعادلات 12.7 و 13.7 الواردة أعلاه هي معادلات التسارع والسرعة العامة للمقذوفة بالقرب من سطح الأرض وتحت تأثير قوة الجاذبية فقط. إن تحديد قيمة الإزاحة (الانحراف) في حركة المقذوفة، نتيجة لدوران الأرض حول نفسها، يتطلب حل هذه المعادلات بدلالة الإحداثيات الديكارتية المتحركة x ، y و z للشروط الحدية boundary conditions التالية: إذا افترضنا أن المقذوفة انطلقت في اللحظة الابتدائية $t = t_o = 0$ من النقطة O على سطح الأرض $\mathbf{r}_o = 0$، بسرجهةٍ ابتدائية $\boldsymbol{v}_o$، **شكل** 4.7

$$t = t_o = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_o = 0 \quad \& \quad \boldsymbol{v}_o = \dot{x}_o\,\boldsymbol{i} + \dot{y}_o\,\boldsymbol{j} + \dot{z}_o\,\boldsymbol{k} \qquad 14.7$$

فإن تعويض هذه الشروط في المعادلة 13.7 ، يبين أن الثوابت الثلاثة الأولى تتحدد كما يلي

$$C_1 = \dot{x}_o,\; C_2 = \dot{y}_o,\; C_3 = \dot{z}_o$$

وتبعاً لذلك ، تؤول معادلات السرعة 13.7 إلى الشكل الجديد

$$\dot{x} = \dot{x}_o - 2\,\omega z \sin\varphi$$
$$\dot{y} = \dot{y}_o - g\,t + 2\,\omega\, z \cos\varphi \qquad 15.7$$
$$\dot{z} = \dot{z}_o + 2\,\omega\,(x \sin\varphi - y \cos\varphi)$$

وباستبدال $\dot{x}$ و $\dot{y}$ الواردتين في المعادلة الثالثة من معادلات 12.7 بقيمهما من معادلات 15.7 نحصل على مركبة التسارع في الاتجاه $\boldsymbol{k}$

$$\ddot{z} = 2\,\omega\,\{(\dot{x}_o - 2\,\omega\, z \sin\varphi)\sin\varphi - (\dot{y}_o - g\,t + 2\,\omega\, z \cos\varphi)\cos\varphi\}$$
$$\ddot{z} = 2\,\omega\,\dot{x}_o \sin\varphi - 2\,\omega\,\dot{y}_o \cos\varphi - 4\,\omega^2 z + 2\,\omega\, g\, t \cos\varphi \qquad 16.7$$

وفي حالات كثيرة يعتبر المقدار ω^2 صغيرٌ جداً بالنسبة إلى مركبات السرعة الابتدائية $\dot{x}_o$ ، $\dot{y}_o$ و $\dot{z}_o$ ، إذ يمكن إلغائه بسهولة. وبإجراء التكامل المتتالي مرتين نحصل على مركبتي السرجهة والإحداثيّ z

$$\dot{z} = 2\,\omega\,\dot{x}_o\, t \sin\varphi - 2\,\omega\,\dot{y}_o\, t \cos\varphi + \omega\, g\, t^2 \cos\varphi + C_4 \qquad 17.7$$
$$z = \omega\,\dot{x}_o\, t^2 \sin\varphi - \omega\,\dot{y}_o\, t^2 \cos\varphi + \omega\, g\,\frac{t^3}{3}\cos\varphi + C_4\, t + C_5 \qquad 18.7$$

كما أن تعويض الشروط الحدية 14.7، في المعادلتين الأخيرتين ينتج أن

$$C_4 = \dot{z}_o \;,\; C_5 = 0$$

والمعادلة الأخيرة 18.7 تصبح

$$z = \omega\, g\,\frac{t^3}{3}\cos\varphi + \omega\, t^2\,\{\dot{x}_o \sin\varphi - \dot{y}_o \cos\varphi\} + \dot{z}_o\, t \qquad 19.7$$

التي تبين مقدار الانحراف الشـــرقي للمقذوفة عند حركتها بالقرب من سطح الأرض. ولإيجاد مقدار الانحراف في الاتجاهين الآخرين x و y نستبدل z الواردة في المعادلات 15.7 بقيمتها من المعادلة 19.7، فنكتب

$$\dot{x}=\dot{x}_o-2\omega\dot{z}_o t\sin\varphi \qquad 20.7$$

$$\dot{y}=\dot{y}_o-gt+2\omega\dot{z}_o t\cos\varphi \qquad 21.7$$

تكامل المعادلتين 20.7 و 21.7 يعطي الإزاحتين، الشمالية الموازية لخط الزوال

$$x=\dot{x}_o t-\omega\dot{z}_o t^2\sin\varphi+C_6 \qquad 22.7$$

والعمودية

$$y=\dot{y}_o t-g\frac{t^2}{2}+\omega\dot{z}_o t^2\cos\varphi+C_7 \qquad 23.7$$

وبأخذ الشروط الحدية مرةً أخرى بالحسبان للمعادلتين 22.7 و 23.7 نجد أن $C_6 = C_7 = 0$، ولينتج أخيراً أن مقدار الإزاحتين ، الموازية لخط الزوال والعمودية

$$x=\dot{x}_o t-\omega\dot{z}_o t^2\sin\varphi \qquad 24.7$$

$$y=\dot{y}_o t-g\frac{t^2}{2}+\omega\dot{z}_o t^2\cos\varphi \qquad 25.7$$

هذه المعادلات 24.7، 25.7 و 19.7 تدعى بمعادلات الحركة العامة The General Equations of Motion للمقذوفة بالقرب من سطح الأرض تحت تأثير قوة الجاذبية فقط. إن مقارنة أولية بين المعادلات المذكورة أعلاه وبين معادلات حركة المقذوفة المنطلقة من مركز إطار إسناد قصوري وتحت نفس الشروط الابتدائية، لتبين أن هناك انحرافاً ما في الإحداثيات يعتمد على سرعة دوران الأرض وزاوية خط العرض. وتبلغ قيمته للإحداثيات الثلاثة

$$\Delta x=-\omega\dot{z}_o t^2\sin\varphi \qquad 26.7$$

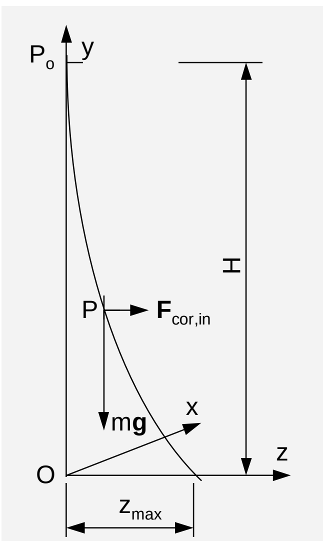
$$\Delta y=\omega\dot{z}_o t^2\cos\varphi \qquad 27.7$$

$$\Delta z=\omega g\frac{t^3}{3}\cos\varphi+\omega t^2\{\dot{x}_o\sin\varphi-\dot{y}_o\cos\varphi\} \qquad 28.7$$

بهذه النتائج، المعادلات 19.7 و 24.7 - 28.7 وحيثما يكن زمن الحركة كبيراً، كانسياب الأنهار وحركة الرياح، تفسر ظواهر تآكل الشواطئ اليمنى للأنهار الجارية في النصف الشمالي للأرض، وانحراف التيارات البحرية والرياح ذات الاتجاه الثابت. أما الصواريخ البعيدة المدى - العابرة للقارات فسينحرف مسارها بوضوح إذا لم يؤخذ دوران الأرض بالحسبان.

4.7 انحراف الجسيم الساقط رأسياً نتيجة دوران الأرض حول محورها

نفترض أن جسيماً، كتلته m، سقط بدون سرعة ابتدائية من ارتفاعٍ H فوق سطح الأرض. نثبت إطار الإســناد القصوري $O_1x_1y_1z_1$ في مركز الأرض، والإطار المتحرك Oxyz في النقطة الواقعة على سطح الأرض، والناتجة من إسقاط خط شاقولي Plumb Line من الموقع الابتدائي للجسيم الساقط P_o، **شكل** 4.7. نرسم المحور Ox منطبقاً على مماس منحنى خط الزوال Meridian Line، وباتجاه الشمال، ونرسم المحور Oy شاقولياً من O للأعلى، أما المحور Oz فهو عموديٌّ على المحورين السابقين وباتجاه الشرق، **شكل** 5.7.



شكل 5.7

تتحدد حركة الجسيم الســـاقط نحو الأرض بالمعادلة الأساسية لحركته النسبيـــة، معادلـــة 1.7. ســـنعتبر وزن هذا الجسيم ثابتاً، وكذلك تســـارع الجاذبيـــة الأرضية، ونهمل تأثير مقاومة الهواء للجسيم أثناء الحركة. إن حلّ المعادلة 1.7 التدريجي، يتطلب إلغاء تأثير قوة كوريوليس القصورية وقوة التسارع المكتسب، أي أن $\mathbf{F}_{tr,\,in} = \mathbf{F}_{cor,\,in} = 0$. مما يسهل حل المعادلة الناتجة

$$\mathbf{a}_r = -g\,\boldsymbol{j} \qquad 29.7$$

أو ثلاث معادلاتٍ قياسية

$$\ddot{x} = 0,\quad \ddot{y} = -g,\quad \ddot{z} = 0 \qquad 1.29.7$$

وذلك للشروط الحدية الجديدة

$$t = t_0 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}_o = 0\ ,\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_o = H\,\boldsymbol{j} \qquad 30.7$$

تكامل المعادلات 1.29.7 مرتين يبين أن مركبات الإزاحة

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= H - g\frac{t^2}{2} \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad 31.7$$

إذا عوضنا الحل التقريبي الأول 31.7 ومشتقاته في المعادلات 12.7 نحصل على معادلات ذات تقريب ثاني

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \\ \ddot{z} &= 2\omega g t \cos\varphi t \end{aligned} \qquad 32.7$$

تتحدد قيمة الانحراف الشرقي للجسيم الساقط من الارتفاع H بإجراء التكامل مرتين على المعادلة الأخيرة من معادلات 32.7، لنجد أن

$$\dot{z} = \omega g \cos\varphi\, t^2 + C_8$$

$$z = \omega g \frac{t^3}{3} \cos\varphi + C_8 t + C_9$$

وبتعويض الشروط الحدية 30.7، يتلاشى الثابتان

$$C_8 = C_9 = 0$$

والانحراف الشرقي يبلغ

$$z = \omega g \frac{t^3}{3} \cos\varphi \qquad 33.7$$

من جهة أخرى، يتحدد الانحراف الشرقي كدالة فرق ارتفاع H-y. فنستبدل t الواردة بقيمتها من المعادلة الثانية من معادلات 31.7

$$t = \sqrt{\frac{2(H-y)}{g}} \qquad 34.7$$

فنحصل على المعادلة

$$z = \frac{\omega g}{3} \left\{ \frac{2(H-y)}{g} \right\}^{\frac{3}{2}} \cos\varphi \qquad 35.7$$

هذه المعادلة مطابقة لمعادلة القطع المخروطي (المكافئ) نصف التكعيبي Semicubical Parabola، وهي تحدد مقدار الانحراف الشرقي للجسيم أثناء سقوطه الحر بدلالة الارتفاع الذي فقده، وزاوية خط العرض بالإضافة إلى سرعة دوران الأرض. وتبعاً لذلك ، يتحدد أقصى انحرافٍ يبلغه الجسيم من سقوطه على الأرض لحظة ارتطامهِ بسطحها، وعندئذ تكون y = 0

$$z_{max} = \frac{2H\omega}{3} \cos\varphi \sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad 36.7$$

نلاحظ أن مقدار انحراف الجسيم الساقط الأقصى نحو الشرق صغيرٌ جداً لتناسبه الطردي مع السرعة الزاوية لدوران الأرض. فعلى سبيل المثال، إذا سقط جسيم من ارتفاع H = 100 متر من فوق مدينة القدس، زاوية خط العرض $\varphi = 31^{o}\ 45'$ وتسارع الجاذبية g = 9.8 متر/ثانية^2، فإن أقصى انحرافٍ للشرق يبلغه هذا الجسيم، وحسب المعادلة 36.7 سيكون 1.87 سنتيمتراً.

البـــــــاب
الثـــــامن

ديناميكا النظام والجسم الجاسئ

DYNAMICS OF A SYSTEM AND RIGID BODY

1.8 مقدمة في ديناميكا النظام والجسم الجاسئ والقوى المؤثرة عليه

النظام هو فئةٌ مكونةٌ من اثنين أو أكثر من الأشياء المتفاعلة عادةً بعضها مع بعض كالنظام الشمسي، أو مجموعةٍ الأجزاء المكونة لجسمٍ صلب. ومن المفيد على حدٍ سواء، دراسة الأنظمة بصورةٍ عامةٍ ...... اعتبر فئةً من الجسيمات المتفاعلة، أي عددٍ من الجسيمات، والتي يعتمد موضع و/أو حركة كلّ جسيمٍ فيها على مواضع و/أو حركات جميع الجسيمات الأخرى، عندئذ ندعوها بالنظام الميكانيكي.

من جهة أخرى؛ تدعى مجموعة الجسيمات المادية، ذات العدد الثابت، والمحددة أبعادها بشكلٍ دقيق بالنظام المتميز أو المتقطع Discrete System. كما تدعى الجسيمات المرتبة بانتظامٍ في الفراغ، وذات عدد غير محدد، لا نهائي وأبعادها متغيرةً بالنظام المتصل Continuous System. وقد يُشكِّل النظام المتميز جسماً مادياً، لا تتغير أبعاده تحت تأثير القوى أياً كانت، ويسمى حينئذٍ بالجسم الجاسئ، أو تتغير أبعاده تحت تأثير القوى ويتشوه ميكانيكياً ليدعى بالجسم غير الجاسئ Nonrigid Body. والنظام الجاسئ هو النظام المكون من مجموعة أجسامٍ جاسئة، كما أن النظام غير الجاسئ هو النظام المكون من مجموعة أجسامٍ غير جاسئة. ولذلك؛ تعتبر الماكنات على اختلافها والسيارات والطائرات والصواريخ والمركبات الفضائية أجساماً جاسئة.

يمكن تقسيم القوى المؤثرة على نظامٍ ما أثناء حركته، أو حركة الجسيمات المكونة له إلى قوى داخلية وقوى خارجية كيفما تؤثر هذه القوى. فالقوى التي تؤثر بها جسيمات و/أو أجسام لا تدخل في تكوين النظام المعين، على جسيمات و/ أو أجسام النظام نفسه تعتبر قوى خارجية بالنسبة لهذا النظام. وعلى النقيض من ذلك، تعتبر القوى التي تؤثر بها جسيماتٌ و/أو أجسام من النظام على جسيمات و/أو أجسام أخرى من نفس النظام قوى داخلية. ولهذا فالقوة الخارجية قوة تؤثر على النظام أو على جسيمٍ فيه من خارجه، أمّا القوة الداخلية فهي قوة منشؤها وفعلها (ســـببها ومســـببها)، كلاهما من داخل النظام قيد الدراسة. ومن الممكن طبعاً؛ أن تكون نفس القوة خارجية لنظامٍ ما وداخليةٌ لآخر. فمثلاً قوة جذب الشمس للأرض هي قوةٌ خارجيةٌ عند دراسة حركة الأرض كجسمٍ مفرد، أما في النظام المكون من الشمس والأرض فإن نفس القوة تعتبر داخليةٌ. وعلى ذلك؛ يمكن تقسيم القوة (محصلة القوى)$\mathbf{F}$ المؤثرة على نظامٍ ما إلى جُزأين داخلي وخارجي

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{IN} + \mathbf{F}^{EX}$$

حيث إن IN و EX رموزٌ عُليا تُعَرِّف محصلتي القوى الداخلية والقوى الخارجية على الترتيب.

الخواص الرئيسية للقوى الداخلية

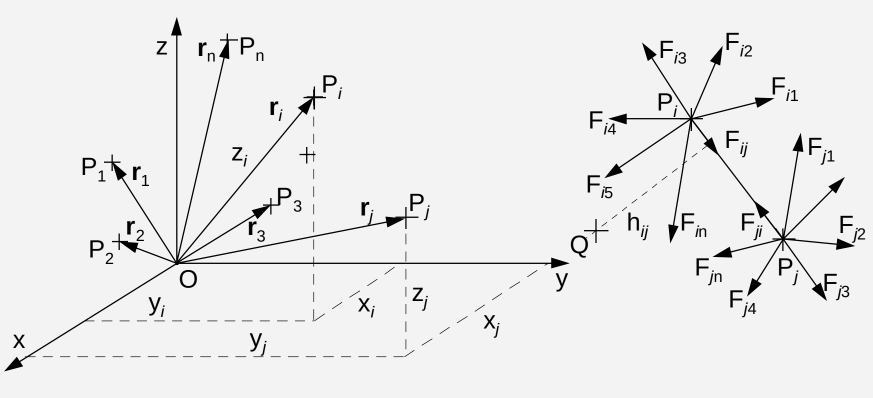
1- **المتَّجِهُ الرئيسي (المجموع الهندسي) لكل القوى الداخلية في أي نظامٍ يساوي الصفر**. أو رياضياً

$$\mathbf{F}^{IN} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i^{IN} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ij} = 0 \qquad 1.8$$

حيث إن $\mathbf{F}^{IN}$ المتَّجِه الرئيسي لكل القوى الداخلية في النظامِ، بينما $\mathbf{F}_{ij}$ ، $i \neq j$ قوة الفعل التي يؤثر بها الجسيم i على الجسيم j أو بالعكس. ولذلك فالجسيمان i و j من النظام المعين يؤثران بعضِهما على بعض بالقوتين F_{ij} ، F_{ji}، المتكافئتين قيمةً والمضادتين اتجاهاً، **شكل** 1.8. ولهذا فمحصلتهما تساوي صفراً

$$\mathbf{F}_i^{IN} = \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0 \qquad 1.1.8$$

ولأن جميع القوى الداخلية ترد في أزواج متوازنة، ومجموع أيَّ زوجٍ من هذه القوى يساوي صفراً، فإن مجموع كلَّ هذه الأزواج يساوي صفراً أيضاً. وحيث إن الجسيمين i و j مختاران بشكلٍ اعتباطيّ، فإن محصلة كل القوى الداخلية تؤول للصفر، أي أن المعادلة 1.8 صحيحة تماماً.



شكل 1.8

إن تعريف القوتين الداخلية والخارجية، مع قانون نيوتن الثالث يستلزم فوراً، **أن مجموع القوى الداخلية يجب أن يكون صفراً**. فلكل قوةٍ داخليةٍ قوةٌ مساويـــةٌ لها ومضادة. ولذلك فالرجل الذي يركب عربةً، يؤثر بقوة وزنه على العربة للأسفل، وتؤثر العربة بدورها بقوة رد الفعل، المساوية لوزن الرجل للأعلى. إن البحث في حركة الرجل وحده يجعل من قوة رد الفعل قوةً خارجيةً مؤثرةٍ على الرجل، بينما تعتبر (قوة رد الفعل) قوةً داخليةً عند بحث حركة النظام المكون من الرجل والعربة.

2- **العزم الرئيسي (مجموع العزوم الهندسي) لكل القوى الداخلية في النظام حول أية نقطة ثابتة أو محور ثابت يساوي صفراً**. ورياضياً؛ يكون عزم القوتين الداخليتين بين الجسيمين i و j حول نقطةٍ ما، Q مثلاً، مساوياً للصفر

$$\mathbf{M}_{Qi} = \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} h_{ij}\,\mathbf{F}_i^{IN} = \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} h_{ij}\,(\mathbf{F}_{ij}+\mathbf{F}_{ji}) = 0 \qquad 2.8$$

وذلك لأن القوتين الداخليتين متساويتان ومتضادتان $\mathbf{F}_{ji}=-\mathbf{F}_{ij}$، **شكل** 1.8 ومعادلة 1.1.8. وبالتالي فعزمهما حول أية نقطةٍ يتلاشى. ولأن i و j جسيمان مختاران بشكلٍ اعتباطي من جسيمات النظام، فإن عزم أي قوتي تفاعل $\mathbf{F}_{ij}$ و $\mathbf{F}_{ji}$، ولأي جسيمين من جسيمات النظام حول النقطة نفسها يساوي صفراً. إذ إن عزم أية قوةٍ حول نقطةٍ ما يتلاشـــى لوجود عزم قوةٍ أخرى مساوٍ ومضاد حول النقطة نفسها. وبالتالي فمجموع عزوم جميع القوى الداخلية في النظام حول النقطة نفسها يساوي صفراً. أي أن معادلة 2.8 صحيحةٌ أيضاً.

غير أنه، لا ينتج من الخاصتين المذكورتين أعلاه، أن القوى الداخلية التي توازن بعضها بعضاً لا تؤثر على حركة أجزاء النظام. بل تؤثر هذه القوى على جسيمات مادية مختلفة، يمكن أن تُسبب إزاحاتٍ متبادلةً لأذرعِ وأجسامِ النظامِ نفسه. وتكون القوى الداخلية متوازنة التأثير عندما يكون النظام قيد الدراسة جسماً جاسئاً.

من ناحية أخرى؛ تُستغل بديهيات القيود عند بحث حركة النظام المقيد، بحيث يُدرس النظام المعين وكأنه تحرر من القيد، واستُبْدِل تأثير القيد بقوة رد فعله. وعليه يؤول النظام المقيد الحركة إلى نظام حر تحت تأثير القوى وردود الأفعال.

2.8 هندسة الكتل، الكتلة الكلية، مركز الكتلة

تعتمد حركة نظامٍ ما على كتلته الكلية، وتوزيع كتله المكونة له، علاوةً على القوى المؤثرة عليه. اعتبر فئةً من الجسيمات المتفاعلة، أي عدد من الجسيمات المكونة لنظام ما. دعنا نميزها، الجسيم 1 كتلته m_1، ومتَّجِه موضعه $\mathbf{r}_1$، وسرجهته $\boldsymbol{v}_1$، وهلُّمَ جَرَا؛ كما نُسَمِّ متغيرات الجسيمات الأخرى بنفس الطريقة. ونُسَمِّ الكتلة الكلية للنظام M

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + m_2 + \dots\dots\dots + m_n \qquad 3.8$$

والتي تســـاوي المجموع الجبري لكتل جميع جســـيمات النظام. بالإضافة إلى M، فإن الخاصية الهامة الأخرى هي مركز كتلة النظام الذي يُعرف بالعلاقة الاتجاهية

$$M\mathbf{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i\ \mathbf{r}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M}\mathbf{r}_i \qquad 4.8$$

حيث يُعَرَّف المقدار $\sum_{i=1}^{n} m_i\ \mathbf{r}_i$ بالعزم الاستاتيكي لائتلاف كتـل كل جسيـمـات النظام ومتَّجِهات مواضعها. ومتَّجِه موضع مركز الكتلة $\mathbf{r}_c$ هو المتوسط الموزون Weighted Average لمتجهات الموضع المفردة $\mathbf{r}_i$ لكلّ كتل النظام، بينما معاملات المتوسط الموزون هي $\frac{m_i}{M}$ ، i =1,2,3,.....,n، ومجموعها الجبري يساوي الوحدة $\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M} = 1$. وعلى ذلك؛ يمكن وصف مركز الكتلة بأنه الموضع المتوسط لكل الكتلة في النظام. وليس من الضروري بصورةٍ عامةٍ، أن يقع مركز كتلة النظام بأكمله عند أية نقطة في النظام، أو حتى يكون منطبقاً على مركز إحدى كتله.

ونســــتطيع أحياناً أن نُخَمِّنَ بدقة مركز الكتلة دون اللجوء إلى المعادلة 4.8. فمركز كتلة قضيبٍ منتظمٍ مثلاً، يقع عند مركزه الهندسي، وكذلك الكرة والأسطوانة والمخروط وكل الأجسام المنتظمة. أما بالنسبة للأنظمة المركبة، فإحدى النتائج المفيدة، التي نذكرها دون برهان هي الآتية: إذا عُرِفَ مركز كتلة كل جزء من أجزاء نظام مركب، فإنه يمكن حساب مركز كتلة النظام برمَّتِه باعتبار أن كتلة كل جزءٍ تقع عند مركز كتلة ذلك الجزء، وذلك بالتطبيق المباشـــر للمعادلة الاتجاهية 4.8 أو المعادلات القياســــية الثلاث المنبثقة عنها. إن ذلك يتطلب معرفة كتلة كل جزءٍ ومتَّجِه موضعه والكتلة الكلية للنظام. ولذلك ؛ فمركز كتلة النظام المكون من الأرض والقمر على ســبيل المثال، يقع على بعد 4670 كيلو متراً من مركز الأرض[1].

وعندما يتحرك نظام جسيمات ما يتحرك مركز كتلته أيضاً. ومع أنه من الممكن أن يكون مركز الكتلة نقطة في المكان لا ارتباط لها بأية مادة، إلا أنها نقطةً محددةً تماماً ولها سرجهةٌ محددةٌ أيضاً. فمفاضلة المعادلة الأخيرة 4.8 يعطينا صيغةً لسرجهة مركز الكتلة

$$M\boldsymbol{v}_c = M\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \qquad 1.5.8$$

$$\boldsymbol{v}_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M}\ \boldsymbol{v}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\ \boldsymbol{v}_i \qquad 2.5.8$$

ومن الواضح أن سرجهة مركز الكتلة هي المتوسط الموزون لسرجهات الجسيمات المفردة. وبالمثل؛ فإن المتوسط الموزون لتسارعات الجسيمات المفردة يساوي تسارع مركز الكتلة

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ \mathbf{a}_i = M\mathbf{a}_c \quad \Rightarrow \quad M\frac{d^2\mathbf{r}_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} \qquad 6.8$$

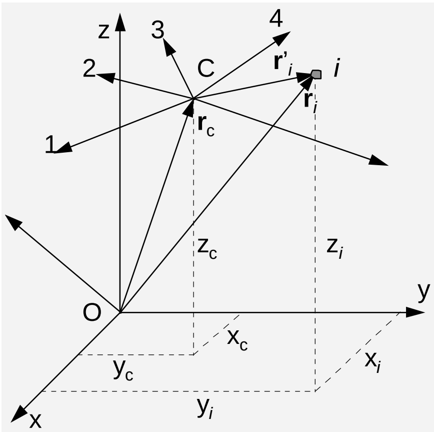
---

[1] انظر **الباب السادس**: **حركة الجسيم تحت تأثير القوة المركزية** وبالتحديد **جدول المعلومات الفلكية** عن كتلة الأرض والقمر وباقي الكواكب.

ومن هنا يتضح أن موضع مركز كتلة النظام يعتمد على توزيع الكتل وأبعادها فقط داخل النظام، وأن القوى المؤثرة على النظام سواءً الداخلية أم الخارجية، لا تؤثر بتاتاً على موضع مركز كتلة النظام. إن مركز كتلة النظام أو حتى الجسم الجاسئ لا ينطبق بالضرورة على مركز ثقل Center of Gravity النظام، وهذا الأخير يمثل نقطة تمر خلالها محصلة قوى الجاذبية الأرضية (الوزن) وقوى القصور أثناء الدوران حول الأرض.

3.8 القوانين العامة لحركة النظام General Laws of Motion

1.3.8 المعادلة التفاضلية لحركة النظام



شكل 2.8

نفترض نظاماً ذا فئة معينة من الجسيمات المادية 1، 2، 3 ...، عددها n، وكتلها m_1، m_2، $m_3 .... m_n$، ومتّجهات مواضعها $\mathbf{r}_1$، $\mathbf{r}_2$ ، $\mathbf{r}_3 ..... $، $\mathbf{r}_n$ ، مقاسةً من مركز الإحداثيات الثابتة Oxyz ، **شكل** 2.8. ندرس حركة الجسيم i من هذه الفئة. تُؤثر عليه القوة الخارجية $\mathbf{F}_i$ ومجموعة القوى الداخلية من الجسيمات الأخرى $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ij}$.

من قانون نيوتن الثاني لحركة هذا الجسيم i نكتب معادلة حركته

$$m\,\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ij} \qquad i, j = 1,2,3, ...,n\ ,\ j\neq i \qquad 7.8$$

كما يمكن كتابة هذه المعادلة الاتجاهية 7.8 لكل جسيمات النظام

$$m\,\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 + \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq 1}}^{n} \mathbf{F}_{1j}$$

$$m\,\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} \mathbf{F}_{2j} \qquad j = 1,2,3, ...,n\ ,\ j\neq i \qquad 8.8$$

....

$$m\,\mathbf{a}_n = \mathbf{F}_n + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{n} \mathbf{F}_{nj}$$

والتي بجمعها حداً حداً نحصل على المعادلة (المعادلات) التفاضلية لحركة النظام بطريقة المجاميع الاتجاهية

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ a_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \qquad i = 1,2,3, ...,n \qquad 9.8$$

حيث تتلاشى محصلة مجاميع القوى الداخلية الناتج من المعادلات 8.8، انطلاقاً من الخاصية الأولى للقوى الداخلية، معادلة 1.8. ويمكن إسقاط مجموعة المعادلات السابقة 7.8 و 8.8 أو حتى المعادلات 9.8 على المحاور الديكارتية المتعامدة الثلاث، أو أية مجموعة محاور ثلاثية أخرى لنحصل على ثلاثة أضعاف عددها من المعادلات. إن المسألة الأساسية في ديناميكا النظام هي تحديد معادلة (أو قانون) حركة كل جسيمٍ من جسيماته عند معرفة القوى المؤثرة عليه. أي بمعنى آخر إيجاد الإحداثيات x_i، y_i و z_i كدوالٍ زمنيةٍ. لكن، وبالأخذ بعين الاعتبار أن القوى الداخلية المؤثرة على جسـيمات النظام تكون في حالات كثيرة غير معروفةٍ، وأن عدد الجسيمات بالعادة يكون كبيراً، فإن حل 3n من المعادلات التفاضلية الناتجة من إسقاط أيٍ من المعادلات السابقة يصبح عديم الجدوى وغير منطقي. فحل 3n معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية كمعادلات المساقط الناتجة من معادلات 9.8 يدفعنا للبحث عن ضعف هذا العدد، أي 6n من الثوابت التكاملية والتي تتحدد مقاديرها من الشروط الابتدائية للحركة. ويُستعاض عن هذا النمط من المعادلات بمعرفة بعض خصائص حركة النظام بشكل عام، وليس حركة كل جسيم من جسيماته بشكل خاص. كما أن بالإمكان إيجاد خصائص حركة النظام من القوانين العامة لديناميكا النظام، والتي تعتبر بالأساس نتاجاً للمعادلة 7.8. ومن أهم هذه المعادلات- القوانين، معادلة حركة مركز كتلة النظام وقوانين زَّخَم النظام وقوانين الزَّخَم الزَّاوِّي للنظام، وأخيراً قانون تغير طاقة حركة النظام والتي سنوردها بقليل من التوسع تباعاً مع بعض التطبيقات.

4.8 **حركة مركز كتلة النظام**

1.4.8 **معادلة حركة مركز كتلة النظام**

سندرس حركة النظام المكون من n جسيم مادي، والذي تؤثر على كل جسيمٍ فيه مجموعة القوى الخارجية والداخلية كما ذكر في البند 1.8، **شكل** 2.8. وباستبدال مجموع للقوى الخارجية المؤثرة على النظام بمحصلتها **F** ، $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i = \mathbf{F}$ ، و $\sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathbf{a}_i = M\mathbf{a}_c$ ، فإننا نستطيع كتابة المعادلة 9.8 بالشكل المقتضب التالي

$$M\,\mathbf{a}_c = \mathbf{F} \qquad 10.8$$

هذه المعادلة 10.8 تشـبه في صورتها الظاهرية حركة الجسيم المادي المفرد الذي كتلته M، وتؤثر عليه قوى تكافئ **F** ويتحرك بتسارعٍ $\mathbf{a}_c$. وعلى هذا الأساس يمكن صياغة معادلة حركة مركز كتلة النظام كالأتي: **يتحرك مركز كتل النظام كجسيم مادي، كتلته تساوي المجموع الجبري لكتل كل جسيماته، وتؤثر عليه قوة تكافئ المتجه الرئيسي لكل القوى الخارجية المؤثرة عليه**. كما يمكن تسمية نفس المعادلة بقانون نيوتن الثاني للنظام ككل : **المتجه الرئيسي لكل القوى الخارجية المؤثرة على النظام يُساوي حاصل ضرب الكتلة الكلية في تسارع مركز الكتلة**. ويمكننا التعبير عن هذه النتيجة الطريفة في بساطتها بصورةٍ أخرى: **يتحرك مركز الكتلة كما لو أن كل كتلة النظام قد تركزت هناك، وكما لو أن جميع القوى قد أثرت هناك أيضاً**. والمعادلة نفسها 10.8 تكافئ ثلاث معادلات قياسية

$$M\,a_{cx} = F_x\,,\; M\,a_{cy} = F_y\,,\; M\,a_{cz} = F_z \qquad 1.10.8$$

والتي تسمى بالمعادلات التفاضلية لحركة مركز كتلة النظام على محاور الإحداثيات الديكارتية. وتكمن أهمية معادلة حركة مركز كتلة النظام، معادلات 10.8 أو 1.10.8، أو حتى أي معادلات أخرى بما يلي: 1- يعطي القانون المذكور أسساً واضحةً ومحددةً لطرق دراسة ديناميكا النظام 2 - لا داعي لمعرفة القوى الداخلية المجهولة أصلاً، المؤثرة على جسيمات النظام.

2.4.8 قانون حفظ حركة مركز كتلة النظام

إذا أثرت على النظام، مجموعة القوى الخارجية، مجموعها الهندسي أثناء الحركة يساوي صفراً $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0$ ، **شكل** 2.8، فإن المعادلة 10.8 تصبح

$$M\,\mathbf{a}_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_c = \text{const.} \qquad 11.8$$

وهذه تمثل قانون حفظ حركة مركز كتلة النظام: **إذا كان المجموع الهندسي لكل القوى الخارجية المؤثرة على نظام ما مساوياً للصفر، فإن مركز كتلة هذا النظام يتحرك حركةً منتظمةً وفي خطٍ مستقيم، أي يتحرك مركز الكتلة بسرجهة ثابتة مقداراً واتجاهاً**. وبشكلٍ خاص؛ إذا كان مركز الكتلة في البداية ساكناً، فإنه يظل كذلك. وكما هو ملاحظ لا يمكن للقوى الداخلية أن تُغيِر حركة مركز كتلة النظام.

من جهة أخرى، إذا كان المجموع الهندسي للقوى الخارجية المؤثرة على النظام لا يســـاوي صفراً، لكن مســـقطها على محورٍ ما، Ox مثلا، يساوي صفراً، فإن مسقط المعادلة 11.8 على المحور المذكور يأخذ الصورة

$$M\,a_{cx} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{cx} = \text{const.} \qquad 1.11.8$$

أي إذا كان مسقط المتجه الرئيسي للقوى الخارجية المؤثرة على نظام ما على أحد المحاور مساويـــاً للصفر، فإن مسقط سرعـــة مركز كتلة النظام على المحور المذكور يكون مقداراً ثابتاً، أي أن مركز كتلة النظام سيتحرك حركةً مـــنتظمةً على هذا المحور. وفي حالاتٍ خاصة ، إذا كانت سرعة مركز كتلة النظام على محورٍ ما، Ox مثلاً، في اللحظة الابتدائية صفراً، $v_{cx0} = 0$، فإن مركز كتلة النظام سيبقى ساكناً بالنسبة إلى ذلك المحور.

5.8 زخم النظام

يعرف زخم النظام بالكمية المتجهة **K** التي تساوي المجموع الهندسي لزِخَامِ كل جسيماته المكونة له

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i \qquad 12.8$$

وبناءً على المعادلة 2.5.8، يمكن استبدال المجموع الأخير في المعادلة 12.8 بحيث تصبح

$$\mathbf{K} = M\,\boldsymbol{v}_c \qquad 13.8$$

أي أن **زخم النظام يساوي حاصل ضرب كتلته الكلية** M **في سرجهة مركزها** $\boldsymbol{v}_c$. وهو كميةٌ متجهةٌ يكون اتجاهها بنفس اتجاه سرجهة مركز الكتلة.

ويتضح من المعادلة 13.8، أنه إذا تحرك نظام الجسيمات بحيث يبقى مركز كتلته ثابتاً لا يتغير، فإن زخمه الرئيسي يساوي صفراً $\mathbf{K}=0$. وعلى سبيل المثال يكون زخم الجسم الدائر حول محور دورانٍ اعتباطيٍ ثابت ويمر بمركز كتلته مساوياً للصفر. أما إذا كانت حركة النظام مركبةً، مستويةً مثلاً، فإن زخمه الرئيسي لا يحدد جزء الحركة الدوراني حول المحور المار بمركز الكتلة، بل جزء الحركة الانتقالي للنظام أو الجسم الجاسئ.

1.5.8 قانون تغير زخم النظام

المشتقة الأولى لطرفي المعادلة 13.8

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=\frac{d(M\boldsymbol{v}_c)}{dt}=M\frac{d\boldsymbol{v}_c}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt}=M\ \mathbf{a}_c$$

فالطرف الأيمن هو حاصل ضرب الكتلة وتسارع مركز الكتلة الذي يساوي - حسب قانون نيوتن الثاني - المتجه الرئيسي للقوى المؤثرة على النظام. وعلى ذلك يمكن استبدال المعادلة السابقة بالعلاقة

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt}=\mathbf{F} \qquad 14.8$$

التي تعبر عن قانون تغير الزخم للنظام بصورة تفاضلية: **المشتقة الأولى لزخم النظام تساوي المتجه الرئيسي للقوى الخارجية المؤثرة عليه**. كما ويمكن صياغة قانون تغير الزخم للأنظمة بطريقة أخرى. فإذا كان زخم النظام الرئيسي في اللحظتين الابتدائية $t_0=0$ والنهائية t، $\mathbf{K}_o$ و $\mathbf{K}$ بالترتيب، عندئذ بضرب طرفي المعادلة 14.8 في dt، ثم إجراء التكامل المطلوب بين اللحظتين المذكورتين، نجد أن

$$\mathbf{K}-\mathbf{K}_o=\int_0^t \mathbf{F}\cdot dt=\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \mathbf{F}_i\ dt$$

أو بدلالة الدفع الرئيسي لمجموعة القوى الخارجية المؤثرة التي زُوِّدَ به النظام P

$$\mathbf{K}-\mathbf{K}_o=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i=\mathbf{P} \qquad 15.8$$

والذي يساوي المجموع الهندسي لدفوع القوى الخارجية المؤثرة الذي زود به النظام خلال تلك الفترة الزمنية المحددة. وتعبر المعادلة 15.8 عن قانون تغير الزخم للأنظمة بصورة تكاملية: **التغير في زخم النظام خلال فترة زمنية محددة يساوي المجموع الهندسي لدفوع القوى الخارجية المؤثرة الذي زود به النظام خلال فتـــرة زمنية محددة**، **ويساوي الدفع الرئيسي للقوة F الذي زود به النظام خلال الفترة الزمنية نفسها**، معادلة 10.8.

إن النظر إلى معادلة حركة مركز كتلة النظام، معادلة 10.8، أو قانون تَغَيُّرِ الزَّخَم، معادلات 14.8 و15.8، يبين لنا صورتين مختلفتين لقانونٍ واحد. إن استخدام أيٍّ من هاتين الصورتين لتعريف حركة الجسم الجاسئ، أو حتى النظام يعطي نتائج مثلى، وإن كان استخدام المعادلة 10.8 أكثر سهولةً ويسرا. أما في الحالات التي يكون فيها النظام وسطاً متصلاً كالموائع - السوائل والغازات أو حتى الأجسام متغيرة الكتلة، فإن استخدام معادلة حركة مركز الكتلة يصبح عديم المعنى والجدوى، ويستخدم بدلاً منه لحل هذه المسائل قانون تغير الزخم للنظام، معادلات 14.8 و 15.8.

2.5.8 قانون حفظ زخم النظام

يتغير الزخم الكلي لنظامٍ ما استجابةً للقوى الخارجية المؤثرة على النظام. وينتج عن ذلك أنه في حالة انعدام القوى الخارجية، وَفقاً للمعادلة 14.8، يكون زخم النظام الرئيسي ثابتاً

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{K} - \mathbf{K}_o = 0 \qquad 16.8$$

وتكمن أهمية حفظ الزخم والذي يبدو متشابهاً مع قانون نيوتن الأول لنظامٍ ما إذا اعتبرنا أجزاء النظام المفردة

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \ \mathbf{K}_n \qquad 1.16.8$$

فيمكن لأي زخمٍ أن يتغير بمفرده مع الزمن؛ إلا أن مجموع هذه الزِّخَام يكون محفوظاً، إذا كان النظام حراً من تأثير أيَّةِ قوةٍ خارجية. لاحظ أننا نتعامل مع مجموع اتجاهي، ولذلك فالزخم الرئيسي للنظام يكون ثابتاً مقداراً واتجاهاً.

إذا كان المتجه الرئيسي للقوى الخارجية المؤثرة على النظام أثناء حركته لا يساوي صفراً، ولكن مسقطه على أحد المحاور، Ox مثلاً، يساوي صفراً، فإننا نستنتج من مسقط المعادلة 14.8 على المحور المذكور أن مسقط زخم النظام يساوي مقداراً ثابتاً

$$\frac{dk_x}{dt} = F_x = 0 \Rightarrow$$

$$K_x - K_{xo} = \text{const.} \qquad 2.16.8$$

وعليه فسرعة مركز كتلة النظام على المحور المذكور تكون ثابتة. أي أن مركز كتلة النظام يتحرك حركةً منتظمةً باتجاه ذلك المحور، أو يبقى ساكناً إذا كانت السرعة الابتدائية صفراً. ويمكن الاستنتاج من قانون حفظ زخم النظام، المعادلات 16.8، أن القوى الداخلية غير قادرةٍ على تغيير زخم النظام. ولذلك سنعرض لبعض الأمثلة التطبيقية على ثبات الزخم للأنظمة

1- **ظاهرة الارتداد في البندقية عند إطلاقها الرصاصة:** تكتسب الرصاصة لحظة إطلاقها زخماً معيناً لدفعها خارج البندقية. وفي الوقت نفسه تكتسب البندقيةُ زَخَماً آخر مساوياً للزَّخَمِ الأول في المقدار ومضاداً له في الاتجاه، وهذا يسبب الحركة العكسية في البندقية، أو ما يعرف بحركة الارتداد للخلف.

2- **الحركة النفاثة في الصواريخ:** يندفع الغاز المحترق بسرعةٍ كبيرةٍ جداً من فوهة المحرك النفاث الخلفية. زخم الغازات المندفعة للخلف يقابله زخمٌ مساوٍ له في المقدار ومضاد له بالاتجاه يدفع الصاروخ للأمام ولهذا تزداد سرعته. وهذا ما سندرسه في البند التالي 3.5.8.

حــل الــمــســائــل

يقوم حل مسائل وتمارين ديناميكا النظام على تحديد القانون أو المعادلة الذي يجب استخدامه للحالة المعينة. فبواسطة المعادلات التي تحكم هندسة الكتل 3.8 - 6.8، يمكن حساب سرجهات وتسارعات عناصر(جسيمات) النظام، بما فيها مركز الكتلة. وإذا أضفنا إلى ذلك قانوني نيوتن الثاني للنظام، معادلة 10.8،

وحفظ الزخم للنظام، معادلة 11.8، فإن ذلك يمكننا من حل التمارين التي تربط بين الإزاحة، القوة والسرجهة. وبالعادة تؤخذ الشروط الابتدائية للحركة بعين الاعتبار. فتلاشي القوة في اتجاهٍ ما، مثلاً، مع شروطٍ ابتدائيةٍ معينةٍ، يمكننا من حساب إزاحة مركز الكتلة أو أحد جسيمات النظام.

وكما الحال في الباب الخامس، فبواسطة قوانين الزخم للنظام، تغير الزخم، المعادلات 14.8 - 15.8 وحفظ الزخم، معادلة 16.8، تُحل المسائل والتمارين التي تربط بين القوة، زمن الحركة والسرجهتين الابتدائية والنهائية لمركز الكتلة.

أسـئـلـةٌ مـحـلـولـة

3.5.8 ديناميكا الأجسام المتغيرة الكتلة

1.3.5.8 المعادلة التفاضلية لحركة الجسم متغير الكتلة ، حركة الصاروخ

لقد اعتُبِرت الكتلة حتى الآن كميةً قياسيةً ثابتةً لا تتغير بمرور الزمن. إلا أن تكوين جسيمات بعض الأنظمة والأجسام قد يطرأ عليها تغيير بتغير الزمن، كأن ينفصل عنها أو يتَّحِد بها أثناء حركتها جسيمات تُنقِص أو تزيد من كتلتها الإجمالية، وتؤول الكتلة تبعاً لذلك، مقداراً متغيراً زمنياً. ومن الأمثلة العملية على الأجسام المتغيرة الكتلة الصواريخ الفضائية، وعربات المناجم التي تتغير كتلها تدريجياً وبشكلٍ متصل، نتيجة استهلاك الوقود أو زيادة الأحمال وغيره.

إذا أمكن أثناء الحركة إهمال أبعاد الجسم المتحرك ذي الكتلة المتغيرة بالمقارنة مع المسافات التي يقطعها هذا الجسم، عنــدئــذ؛ يمكن دراسة حركته كجسمٍ متغير الكتلة ، تتحدد قيمة كتلته رياضياً بالعلاقة

$$m = m(t) \qquad 17.8$$

هذه الدالة، المعادلة 17.8، متصلةٌ زمنياً وقابلةٌ للتفاضل أيضاً. ولتسهيل عملية اشتقاق المعادلة التفاضلية لحركة الجسم المتغير الكتلة واستيعاب التحليل المرافق لهذه العملية يُضاف فرضيتان تُؤْخذان بعين الاعتبار: الأولى أن تسارع الجاذبية الأرضية ثابت $\mathbf{g} = const.$، والثانية أن حركة النظام أو الجسم متغير الكتلة تتم في خط مستقيم، و(محصلة) القوى الخارجية المؤثرة على هذا النظام أو الجسم منطبقةٌ على مساره.

ولتناسب التسارع الأرضي عكسياً مع مربع البعد عن مركز الأرض تصبح الفرضية الأولى دقيقةً في حدود 5% للارتفاعات الأقل من 160 كيلو متراً فوق سطح الأرض[2]. والفرضيـــة الثانية تلغي التأثيرات الداخلية على النظام، لكنها تسمح بإيجاد المعادلة التفاضلية التي تُعَرِّف حركة الجسم متغير الكتلة بسهولةٍ ويُسر. هذه المعادلة تعتمد بشكلٍ رئيسي على التغيير الذي يحدث في الكتلة المتحركة للنظام.

عند انفصال أجزاءٍ (جسيمات) صغيرةٍ جداً من الجسم الأساسي المتحرك، تتولد بين الجسم المتحرك والأجزاء المنفصلة قوتا رد فعلٍ أوليتان، يكون لهما تأثيرٌ متبادل. ولا يشكل أيٌّ من هذين الجزأين (الجسم المتحرك والجزء المنفصل) نظاماً معزولاً، لأن كلَّ واحدٍ منهما يتفاعل مع الجزء الآخر. فالجسم الأساسي يدفع الجزء المنفصل إلى جهةٍ ما، بينما يدفع الجزء المنفصل الجسم المتحرك إلى الجهة المعاكسة بقوةٍ مساويـــةٍ ومضادة. وتعتبر القوتان اللّتان تُمثِّلان الفعل ورد الفعل قوتين داخليتين عند دراسةِ النظام. وإذا اعتبرنا الجسم الأساسي والجسيم المنفصل عنه فئةً واحدةً تُشَكِّلُ نظـــاماً واحداً، عندئذٍ يُمكن استخـــدام قوانين ديناميكا الأجسام والأنظمة ذات الكتلة الثابتة.

---

[2] اعتمدنا في ذلك على الصيغة الرياضية التي تبين مقدار تسارع الجاذبية بدلالة الارتفاع

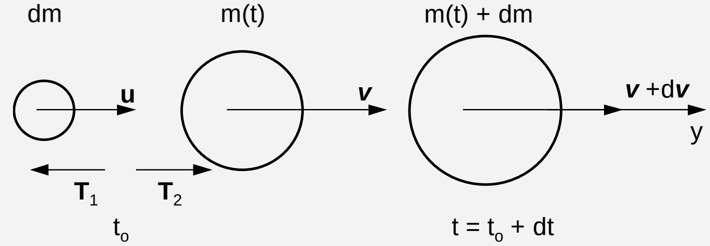
$$g_h = g - [\,0.30855 + 2.2\times10^{-4}\cos 2\phi - 7.2\times10^{-5}\,h\,]\times10^{-2}\,h$$

حيث h الارتفاع بالكيلومترات وg قيمة التسارع على الأرض بالمتر / ثانية^2، و ϕ زاوية خط العرض، أنظر هامش الصفحة 75.

ولإعطاء هذه الأفكار صيغة رياضية، نعتبر كتلة الجسم المتحرك عند اللحظة t_o كانت m(t)، وتتحرك بسرجهــةٍ مطــلقــةٍ $\boldsymbol{v}$، وأن جسيماً أولياً كتلته dm(t)، التأم في تلك اللحظة مع الجسم الأساسي وكانت سرجهته المطــلقــة **u**، **شكل** 3.8. زخم النظام عند اللحظة t_o

$$\mathbf{K}_o = m(t)\,\boldsymbol{v} + dm(t)\,\mathbf{u} \qquad 1.18.8$$

وبمرور الفترة الزمنية dt، تتغير كتلة الجسم الأساسي بالمقدار dm(t)، لتُصبح m(t) + dm(t)، بينما تتغير سرجهته بالكمية المتجهة $d\boldsymbol{v}$ لتُصبح $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$. ولذلك فزَخَمُ النظام المكون من الجزأين، الجسم الأساسي والجسيم الملتئم ، عند نهاية اللحظة t، $t = t_o + dt$، يُصبح



شكل 3.8

$$\mathbf{K} = [\,m(t) + dm(t)\,]\,[\,\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}\,] \qquad 2.18.8$$

تغيير زخم النظام $d\mathbf{K}$ بين الزمنيين t و t_o يساوي الفرق بين الزخمين عندهما

$$d\mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_o = [m(t) + dm(t)\,][\,\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}\,] - [\,m(t)\,\boldsymbol{v} + dm(t)\,\mathbf{u}\,] \qquad 19.8$$

وبعد إلغاء الأجزاء الصغيرة وإعادة ترتيب الباقي يصبح تغير الزخم

$$d\mathbf{K} = m(t)\,d\boldsymbol{v} - dm(t)\,[\,\mathbf{u} - \boldsymbol{v}\,]$$

أما معدل تغير الزخم عند الزمن t_o، فهو المشتقة

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m(t)\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - [\,\mathbf{u} - \boldsymbol{v}\,]\,\frac{dm(t)}{dt}$$

فالطرف الأيسر هو القوة **F** حسب المعادلة 14.8، $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}$. وإذا عرفنا المتغير الجديد $\boldsymbol{v}_r$، الذي يُمثل السرجهة النسبية لالتئام (انفصال) الجسيمات بالجسم الأساسي $\boldsymbol{v}_r = [\mathbf{u} - \boldsymbol{v}]$، فإن المعادلة السابقة تؤول إلى أيٍ من المعادلتين التاليتين

$$m(t)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{F} + \boldsymbol{v}_r\,\frac{dm(t)}{dt} \qquad \& \qquad m(t)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{T} \qquad 20.8$$

إذ تُمَثل كلتاهما المعادلة التفاضلية لحركة الجسم المتغير الكتلة . هذه المعادلات 20.8 ، تُدعى غالباً في الهندسة الفضائية **بمعادلة ميتشيرسكي**[3]، وهي تُشبِه إلى حدٍ بعيد معادلة حــركـــة الجسم ذي الكتلة الثابتة، معادلة 2.3،

---

[3] **إيفان ميشيرسكي** I. Meshchersky، 1859-1935 عالم ميكانيكا روسي. نشر دراسته، أطروحة الدكتوراه "**ديناميكا الأجسام متغيرة الكتلة** "، بين عامي 1897-1904 وفيها أورد المعادلة 20.8.

والمتأثر بمحصلة القوتين الخارجية **F** وقوة رد الفعل $\mathbf{T} = \boldsymbol{v}_r \frac{dm}{dt}$. إن قوة رد الفعل **T**، ناتجةٌ من التئام أو انفصال جسيمات بالجسم الأساسي، وتعرف كحاصل ضرب السرجهة النسبية ومعدّل تغير الكتــلة. ويُساوي معدل تغيّر الكتلة عددياً كتلة الوقود المستهلكة أو المستنفدة في وَحْدَة الزمن، وهو كميةٌ موجبةٌ عند التئام الجســيمات بالجســم الأساسي $\frac{dm}{dt} > 0$، في حين أنّه كميةٌ سالبةٌ عند انفصالها عن الجسم الأساسي $\frac{dm}{dt} < 0$.

وعلى العموم، إذا كانت السرجهة النسبية مضادةً للقوة في الاتجاه، والكتلة الكلية متناقصةً، فإن قوة رد الفعل الناتجة من اندفاع الوقود للخلف هي قوة دفعٍ إضافيةٍ، تدفع الجسم المتحرك للأمام. وعلى النقيض من ذلك، إذا كانت السرجهة النسبية متسامتةً أو موازيةً للقوة، والكتلة الكلية متناقصةً، فإن قوة رد الفعل الناتجة من اندفاع الوقود هي قوة كبحٍ تعيق الجسم المتحرك. وبالعادة ، تُدعى القوتان المذكورتان أعلاه في هندسة الطيران بالقوة النفاثة - الدفع Thrust، إذا كانت قوةَ دفعٍ للأمام، وبالقوة الكابحة إذا كانت تعيق الصاروخ.

من جهةٍ أخرى، إذا كانت السرجهة النسبية لالتئام أو انفصال الجسيمات عن الجسم الأساسي تساوي صفراً $\boldsymbol{v}_r = 0$، فإن المعادلات 20.8 تؤول إلى معادلة حركة مركز كتـــلـــة النظام، معادلة 10.8. وإذا كانت السرجهة المطلقة لالتئام أو انفصال الجسيمات عن الجسم الأساسي تساوي صفراً $\mathbf{u} = 0$، فإن المعادلات نفسها 20.8 تصبح بعد ترتيبها واختصارها

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v}\frac{dm}{dt} = \mathbf{F} \qquad \Rightarrow \quad \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \mathbf{F}$$

والتي تكافئ قانون تغّير زخم النظام، معادلة 14.8. وحتى نتمكن من حساب مقدار القوة الإضافية T، نستخدم قانون تغير الزّخَم الخطّي بصيغة الدفع الذي زودت به الكتلة dm، **شكل** 3.8، وللاتجاه $\boldsymbol{j}$

$$-\mathbf{T}_1\, dt = dm\, [\, \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v} - \mathbf{u}\,]$$

ولأن $dm\, d\boldsymbol{v} \cong 0$ تؤول المعادلة السابقة بعد قسمتها على dt إلى

$$\mathbf{T}_1 = -\frac{dm(t)}{dt}[\boldsymbol{v} - \mathbf{u}\,] = \frac{dm(t)}{dt}[\mathbf{u} - \boldsymbol{v}\,]$$

أو

$$\mathbf{T}_1 = -\boldsymbol{v}_r \frac{dm(t)}{dt} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_1 = -v_r \frac{dm(t)}{dt}\boldsymbol{j} \qquad 1.21.8$$

أما القوة $\mathbf{T}_2$ المساوية للقوة $\mathbf{T}_1$ فتؤثر لليمين

$$\mathbf{T}_2 = \boldsymbol{v}_r \frac{dm(t)}{dt} \qquad , \ \mathbf{T}_2 = v_r \frac{dm(t)}{dt}\boldsymbol{j} \qquad 2.21.8$$

ومن المهم دراسة الحالة التي تكون فيها $\mathbf{T}_2$ موجبة، أي قوةٌ إضافيةٌ تضاف إلى محصلة القوى المؤثرة على الجسم المتحرك. وهي الحالة التي تكون فيها إشارة كل من السرعة النسبية ومعدل تغير الكتلة واحدةً ؛ أي إمّا موجبتين وإمّا سالبتين في نفس الوقت.

2.3.5.8 معادلة تسيلكوفسكي[4]

كيف يمكن إيجاد معادلة حركة الصاروخ المنطلق في الفضاء باستخدام **معادلة ميتشيرسكي**، هذا ما فعله **ك. تسيلكوفسكي**.

اعتبر الصاروخ المنطلق في الفضاء ضمن مجال الجاذبية الأرضية تحت تأثير القوتين المُميزتين: قوة وزنه $m\mathbf{g}$ وقوة احتكاك الهواء $\mathbf{F}_d$ مع الوسط الذي يمر به. إذا اعتبرنا F_d قوةً عديمة التأثير نسبةً إلى القوى الأخرى، **شكل 4.8**، فإن المعادلة 20.8 تُكتب بالشكل التالي

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{v}_r\frac{dm}{dt} + m\mathbf{g} \qquad 22.8$$

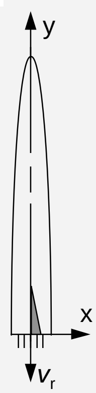
يتحرك الصاروخ، الذي كتلته متغيرةً زمنياً $m(t)$، ومقدارُها عند بداية حركته m_o+m_{fmax}، حيث إن m_o كتلة جِرم أو هيكل الصاروخ بدون أي وقود، و m_{fmax} كتلة الحمولة القصوى من الوقود. وإذا أضفنا فرضيةً جديدة وهي أن كتلة الصاروخ المتغيرة تساوي كتلة جرمه فارغاً m_o، مضافاً إليها كتلة الوقود المتبقية $m_{fmax}-m_f(t)$، حيث إن $m_f(t)$ كتلة الوقود المستهلكة حتى اللحظة المعينة

$$m(t) = m_o + m_{fmax} - m_f(t) \qquad 23.8$$

وبدلالة المشتقة الأولى لطرفي هذه المعادلة $\frac{dm(t)}{dt} = -\frac{dm_f(t)}{dt}$، وأخذ مسقط السرجهة النسبية على المحور y $\boldsymbol{v}_r = -v_r\boldsymbol{j}$ وتعويض ذلك في المعادلة 22.8 وحلها بدلالة dv يكون

$$dv = v_r\frac{dm_f(t)}{m} - g\,dt \qquad 24.8$$

التي تُمثل **المعادلة التفاضلية لحركة الصاروخ**، وهي معادلة أساسية في هندسة الفضاء والصواريخ. كما تكون صحيحةً للصواريخ والمركبات الفضائية البعيدة جداً عن جميع مراكز الجاذبية، عندها يمكن التعامل مع المعادلة 24.8 بدون عنصر الجاذبية الأرضية g. إن حل المعادلة المذكورة يتم بإجراء التكامل المحدود لطرفيها ففي اللحظة الابتدائية $t_0 = 0$، تكون سرعة الصاروخ الابتدائية v_o، وكتلة الوقود المستنفدة صفراً $m_f(t) = 0$. وفي اللحظة t، تصبح سرعة الصاروخ v، وتؤول كتلة الوقود المستنفدة إلى $m_f(t)$. وعلى هذا الأساس بإجراء التكامل لطرفي المعادلة 24.8 وللشروط السابقة نحصل على



شكل 4.8

$$\int_{v_o}^{v} dv = +v_r\int_{0}^{m_f(t)}\frac{dm_f(t)}{m_o+m_{fmax}-m_f(t)} - \int_{0}^{t} g\,dt$$

---

[4] **ك. تسيلكوفسكي** K.Tsiolkovsky ، 1857- 1935 عالمٌ ومخترعٌ روسي. نشر البحث "اكتشاف الفضاء بالالات النفاثة" في المجلة العلمية الروسية **نـاؤوتـشينـه أوبـوزورينيـه - التعليقات العلمية** في عدد أيار لعام 1903، وفيه وردت المعادلة المشهورة، معادلة 26.8.

$$v = v_o - g\,t - v_r \ln[m_o + m_{fmax} - m_f(t)]\Big|_0^{m_f(t)}$$

أو

$$v = v_o - g\,t - v_r \ln \frac{m_o + m_{fmax} - m_f(t)}{m_o + m_{fmax}} \qquad 25.8$$

التي تُعرّف سرعة الصاروخ كدالة زمنية. ومن الأهمية بمكان، معرفة السرعة القصوى التي يـصلها الصاروخ عند استنفاده كل الوقود المحمول؛ $m_f(t)=m_{fmax}$، عندئــذٍ تؤول المعادلة 25.8 إلى الشكل الأكثر اقتضاباً

$$v = v_o - gt + v_r \ln(1+\frac{m_{fmax}}{m_o}) \qquad 26.8$$

يتضح لنا من المعادلة الأخيرة 26.8، أن سرعة الصاروخ القصوى تعتمد على 1- سرعــة الانطلاق الابتدائية v_o و2- السرعــة النسبية لاندفاع منتجات الوقود من فوهة محرك الصاروخ v_r، أو سرعة العادم و3 - النسبــة بين كتلة الوقود القصوى وكتلة جِرْم الصاروخ $\frac{m_{fmax}}{m_o}$ (الاحتياطي النسبي للوقود) والمسمّى عادة **بعدد تسيلكوفسكي** N_T. كما تُدعى المعادلة نفسها 26.8 **بمعادلة تسيلكوفسكي**. إن نظرةً متفحصةً لهذه المعادلة تُثْبِت كذلك أن سرعة الصاروخ القصوى في نهاية فترة احتراق الوقود، لا تعتمد على نظام عمل المحرك النفاث، ولا على زمن احتراق الوقود داخل حجرات المحرك، بل على الاحتياطي النسبي $\frac{m_{fmax}}{m_o}$. وهنا تكمن قيمة كلٍ من **عدد تسيلكوفسكي** N_T و**معادلة تسيلكوفسكي**، في أنهما يُبينان الطرق المحتملة للحصول على السرعات الكبيرة اللازمة للطيران في الفضاء.

ولتوصيل مركبة فضائية إلى السرعة الفضائية الأولى $v=v_c$، واللازمة على الأقل للدوران حول الأرض في مدارٍ دائري يستلزم نظرياً زيادة سرعة الانطلاق الابتدائيةٍ وزيادة **عدد تسيلكوفسكي** N_T والسرعة النسبية v_r. ولعدم مواءمته للإنسان المنطلق في الفضاء يلغى المتغير الأول v_o. كما ويلغى المتغير الثالث لمحدوديته. أما التحكم في المتغير الثاني فيظهر أنه يجب أن يزيد عن أربعين ضعفاً؛ أي $N_T>40$ (أكبر من 40). لهذا استعيض عن هذا الصاروخ الضخم بالصاروخ المتعدد المراحل الذي تنفصل مراحله (أجزاءه) لحظة استهلاكه الوقود الذي تحمله المرحلة بكامله. لقد ساعد هذا النوع من الصواريخ المتعددة المراحل الفضائيين على إطلاق الأقمار الصناعية والمركبات الفضائية حول الأرض وإلى الفضاء.

وتخضع زيادة السرعة الابتدائية v_o لصعوباتٍ تقنيةٍ وهائلةٍ ليس من السهولة التحكم بها. كما تعتمد السرعة النسبية لاندفاع منتجات الوقود من الصاروخ على الصفات الكيماوية للوقود وتصميم الصاروخ نفسه. وهذه السرعة النسبية محدودة، ولن تزيد عن مقدارٍ معين. لهذا فإن أفضل الطرق للحصول على السرعات العالية للصواريخ المنطلقة في الفضاء يكْمُن في التحكم **بعدد تسيلكوفسكي** N_T. أي بزيادة الوقود المحمول على الصاروخ مع تخفيض جِرْمِ الصاروخ (وزنه) فارغاً. وهذا أيضا كما يظهر، يخضع لصعوبات تقنية خاصةٍ بصناعة الصاروخ نفسه.

وإذا أردنا أن نصل بالصاروخ إلى السرعة الفضائية الأولى $v_c=8[km/s]$، بسرعةٍ ابتدائيةٍ للانطلاق من على سطح الأرض مساوية للصفر $v_o = 0$، وسرعة نسبية لاندفاع منتجات الوقود من فوهة المحرك

$v_r = 2.4$ [km/s]. وإذا أضفنا ما بين 10 - 15% للتَغلُب على قوة الجاذبية الأرضية ومقاومة الوسط لحظة بـــدايـــة الحركة من على سطح الأرض، عندئذٍ تصبح السرعة عند التصميم $v_c = 9$ [km/s]. وتـــعويـــض بدل هذه القيمة في المعادلة 26.8

$$9\,[\text{ km/s }] = 2.4\,[\text{ km/s }]\ln(1+\frac{m_{fmax}}{m_o})$$

أو بدلالة **عدد تسيلكوفسكي**

$$N_T = \frac{m_{fmax}}{m_o} = 41.5$$

أي يجب أن تزيد النسبة بين كتلة الوقود المحمول القصوى إلى كتلة جِرْمِ الصاروخ عن أربعين ضعفاً على الأقل، بما يتبع ذلك صعوبات تقنيةٍ إضافية. لهذا استُعيِضَ عن هذا الصاروخ الضخم، ذو الوقود السائل، المنطـــلق بسرعة نفثٍ خلفيةٍ مقدارها $v_r = 2\text{-}2.5$ [km/s]، و**عدد تسيلكوفسكي** أكبر من 40 بالصاروخ المتعدد الـــمراحـــل Multistage Rocket، الذي تنفصل مراحله (أجزاؤه) لحظة استهلاكه الوقود الذي تحمله المرحلة بالكامل. هذا يعني عملياً تناقص كتلة الصاروخ، وتبعا لذلك زيادة **عدد تسيلكوفسكي**، تكتسب فيه المرحلة الأخيرة سرعةً إضافية. لقد ساعد هذا النوع من الصورايخ المتعددة المراحل الفضائيين على إطلاق الأقمار الصناعية والمركبات الفضائية حول الأرض وإلى الفضاء.

وفي حالة الحركة البعيدة جداً عن جميع مراكز الجاذبية، فإننا نستطيع إلغاء العنصر g من المعادلتين 25.8 - 26.8. وتسري المعادلتين نفسيهما بدون عنصر الجاذبية بصورةٍ تقريبية للحالات التي يكون فيها التغير في الزخم الناتج عن العادم أكبر بكثير من التغير في الزخم الناتج عن الجاذبية في نفس الفترة الزمنية.

حـــلُّ الـــمســـائـــل

يقوم حل المسائل والتمارين على إيجاد وتعريف معادلة حركة النظام المتغيِّر الكتلة، معادلات 20.8، وحساب قوة الدفع الناتجة من نفث الغازات واحتراق الوقود، معادلات 21.8، ثُمَّ حساب السرعة القصوى لحظة اكتمال عملية الاحتراق من معادلة تسيلكوفسكي 26.8.

أسـئـلـــةٌ مـــحـــلـــولـــة

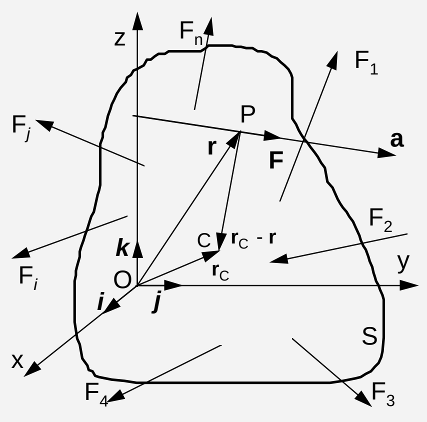
6.8 ديناميكا الجسم الجاسئ

لقد عرف الجسم الجاسئ في البندين 4.2 و 1.8 من وجهتي النظر الكينماتيكية والديناميكية بالجسم الذي لا يتغير شكله الهندسي والمكون من عددٍ هائلٍ من الجسيمات المنتظمة في الفراغ والمترابطة بعضها مع بعض بأبعادٍ متساويـــةٍ وثابتة. وسنعتبر في أغلب الحسابات الهندسية والميكانيكية أن كتلة الجسم الجاسئ متركزةً فقط في نقطةٍ واحدةٍ هي مركز الكتلة.

إن البحث في حركة وديناميكا الجسم الجاسئ سيعتمد بالدرجة الأولى على القوانين العامة لحركة النظام للحصول على معادلته التفاضلية. وتعرف حركة الجسم الجاسئ بالعلاقة بين محصلة القوى المؤثرة ومجموع الحركات المشتركة لجسيماته المكونة له. ومع أن حركة الجسم الجاسئ في الفراغ تتحدد بست درجات حرية، أي يمكنه التحرك ست حركاتٍ مستقلةٍ بعضها عن بعض، إلا أن ما يميز حركته هو اعتمادها بشكلٍ أساسي على كينماتيكا الجسم الجاسئ. وقد قسمت حركته إلى حركةٍ انتقاليةٍ وحركةٍ دورانيةٍ حول محورٍ ثابت وحركةٍ مستوية وحركةٍ دورانيةٍ حول نقطة ثابتة، وأخيراً الحركة العامة. وسندرس الحركات الثلاث الأولى تباعاً.

1.6.8 الحركة الانتقالية

عند حركة الجسم الجاسئ الانتقالية فإن كل جزءٍ (جسيمٍ) من أجزائه (جسيماته) سيتحرك بنفس الطريقة التي تتحرك بها باقي الأجزاء؛ ولهذا فإن كل خط في هذا الجسم سيبقى موازياً لنفس الخط في وضعه الأصلي. وتــبعــاً لذلك؛ تكون مسارات الأجزاء متشابهةً ومتوازية. ويكفي عندها لدراسة حركة الجسم الجاسئ دراسة حركة جزءٍ واحدٍ من أجزائه، الذي من المفضل أن يكون مركز كتلة الجسم الجاسئ.



شكل 6.8

إذا افترضنا مقطعاً رقيقاً S، موازياً لمستوى الحركة الانتقالية، وشاملاً لمركز الكتلة، فيمكن تمثيل جميع القوى المؤثرة F_1 ، F_2 ، ... ، F_n، ومحصلتها F، متسامتةً مع هذا المستوى، **شكل** 6.8. كلُّ جسيمٍ من جسيمات الجسم الجاسئ يتحرك بتسارعٍ يكافئ تســـارع مركز الكتلة $\mathbf{a}_C$. لذلك نكتب المعادلة 10.8 للجسم الجاسئ عند حركته الانتقالية

$$\mathbf{F} = M\,\mathbf{a}_C \qquad 27.8$$

حيث M كتلة الجسم الجاسئ. وإذا اعتبـــرنا النقطة P نقطةً اعتباطيةً على خط عمل محصلة القوى الخارجية **F**، فإن عزم هذه المحصلة حول مركز الإحداثيات القصورية O

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times M\,\mathbf{a}_C \qquad 1.28.8$$

يساوي أيضاً، محصلة عزوم كل القوى الخارجية المؤثرة على جميع جسيمات الجسم الجاسئ بالنسبة إلى نفس المركز. ورياضياً

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i$$

ولأن تسارعات كل جسيمات الجسيم الجاسئ عند الحركة الانتقالية متساوية، فإن استبدال $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_C$ و $\sum_{i=1}^{n} m_i \, \mathbf{r}_i = M\mathbf{r}_C$ من المعادلة 4.8 يعطي

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_C \times M\,\mathbf{a}_C \qquad 2.28.8$$

وبربط المعادلتين 28.8 مع بعض يكون

$$\mathbf{r}_C \times M\,\mathbf{a}_C = \mathbf{r} \times M\,\mathbf{a}_C \qquad 29.8$$

هذه المعادلة 29.8 تكون صحيحةً إذا كانت $\mathbf{a}_C = 0$ أو $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}$. وبينما يشطب الاحتمال الأول لإلغائه شرطاً ضرورياً للحركة الانتقالية المتسارعة يبين الاحتمال الثاني أن مركز الكتلة C منطبقٌ على النقطة P (أو بالعكس). وهذا يعني أن خطَّ عمل القوة **F** يَمُرُّ بالضرورة عبر النقطة C. ولذلك، يمكن القول: **إذا كانت حركة الجسم الجاسئ انتقالية فإن محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه تمر بالضرورة في مركز كتلته، بينما تساوي محصلة عزوم جميع القوى الخارجية المؤثرة عليه حول محورٍ يمر في مركز كتلته صفراً**. ورياضياً فإن حركة الجسم الجاسئ الانتقالية تُسْتَوْفَى بمعادلتين اتجاهيتين، إحداهما المعادلة 27.8 و الأخرى المعادلة 29.8. ومن الطبيعي أن تكتب تلك المعادلات كمعادلاتٍ قياسية

$$F_x = M\,a_{Cx}\,, \qquad F_y = M\,a_{Cx}\,, \qquad F_z = M\,a_{Cz} \qquad 1.27.8$$

$$M_{Cx} = 0\,, \qquad M_{Cy} = 0, \qquad M_{Cz} = 0 \qquad 1.29.8$$

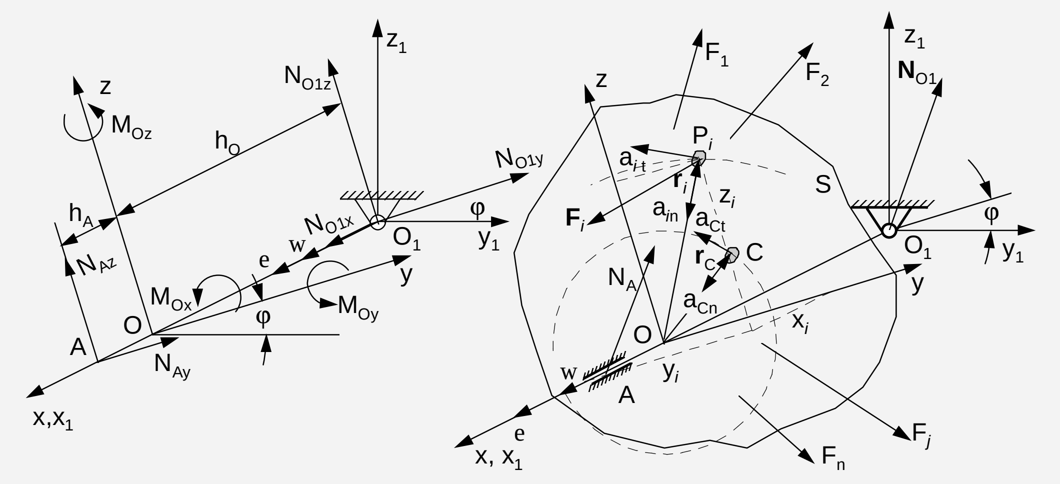
وعندما يتحرك الجسم في مستوىً واحد حركةً انتقالية، بحيث توازي جميع متَّجِهات القوى الخارجية مستوى الحركة، فإن اثنتين من المعادلات 1.27.8 وإحدى المعادلات 1.29.8 لعزم القوى العمودي على مستوى الحركة تعرف حركة هذا الجسم الجاسئ. أمَّا إذا تحرك الجسم الجاسئ في خطٍ مستقيم، وليكن على المحور الأفقي Ox، فإن المعادلة الوحيدة التي تعرف الحركة هي أولى معادلات 1.27.8.

أسـئـلـةٌ مـحـلـولـة

2.6.8 الحركة الدورانية حول محورٍ ثابت

عندما تكون حركة الجسم الجاسئ دورانيةً حول محورٍ ثابت، فإن كل جسيماته تتحرك في مداراتٍ دائريةٍ وحول المحور نفسه. **شكل** 6.8 يبين أن الجسم الجاسئ، مركز كتلته C يدور حول المحور الثابت O_1x_1، من إطار الإسناد القصوري $O_1x_1y_1z_1$، بينما يُثبت إطار الإسناد المتحرك Oxyz في الفراغ إلى النقطة O، كنقطة تقاطع محور الدوران مع المستوى الذي يتحرك فيه مركز الكتلة، أي المستوى Oyz. وبالتالي فإن كلاً من المحورين Ox و O_1x_1 متسامتان.

وفي العادة، لتسهيل عملية اشتقاق المعادلة التفاضلية لدوران الجسم الجاسئ حول محورٍ ثابتٍ، يُحَدَّد المقطع الرقيق S متعامداً مع محور الدوران وشاملاً للمركز O. متَّجِها السرجهة الزاوية للجسم الجاسئ w وتسارعــه الزاوي e يوازيان محور الدوران O_1x_1، $w=\omega \boldsymbol{i}$ و $e=\varepsilon \boldsymbol{i}$. وبالتالي يدور مركز الكتلة في مسارٍ دائري، نصف قطره $\mathbf{r}_C$ وبتسارعٍ عمودي $\mathbf{a}_{Cn}$ ومماسي $\mathbf{a}_{Ct}$. وحتى تتحقق صحة المعادلة 10.8 للحركة الدورانية، نضيف لمحصلة القوى المؤثرة محصلة ردود الأفعال $\mathbf{N}$، $\mathbf{N}=\mathbf{N}_A+\mathbf{N}_{O1}$. فنكتب



شكل 6.8

$$\mathbf{F} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_{O1} = M\,(\mathbf{a}_{Cn} + \mathbf{a}_{Ct}) \qquad 30.8$$

حيث M كتلة الجسم الجاسئ. وباختيار جسيمٍ ما بشكلٍ اعتباطيّ، كتلته m_i، و $\mathbf{r}_i$، $\mathbf{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}$ متجه موضعه، فإن تسارعه بالنسبة إلى مركز الإحداثيات المتحركة O وفقاً للمعادلة 62.2

$$\mathbf{a}_i = e \times \mathbf{r}_i + w \times (w \times \mathbf{r}_i) = -(y_i\,\omega^2 + z_i\,\varepsilon)\,\boldsymbol{j} + (y_i\,\varepsilon - z_i\,\omega^2)\,\boldsymbol{k} \qquad 31.8$$

العزم الرئيسي

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_A \times \mathbf{N}_A + \mathbf{r}_{O1} \times \mathbf{N}_{O1} \qquad 32.8$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} [\,x_i\,\boldsymbol{i} + y_i\,\boldsymbol{j} + z_i\,\boldsymbol{k}] \times m_i\,[-(y_i\,\omega^2 + z_i\,\varepsilon)\,\boldsymbol{j} + (y_i\,\varepsilon - z_i\,\omega^2)\,\boldsymbol{k}] + \mathbf{r}_A \times \mathbf{N}_A + \mathbf{r}_{O1} \times \mathbf{N}_{O1}$$

$$\mathbf{M}_O = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} m_i\,(y_i^2 + z_i^2)\,\boldsymbol{i} + \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i z_i\,\omega^2 - x_i y_i\,\varepsilon)\,\boldsymbol{j} +$$

$$- \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i y_i\,\omega^2 + x_i z_i\,\varepsilon)\,\mathbf{k} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{N}_A + \mathbf{r}_{O1} \times \mathbf{N}_{O1} \qquad 1.33.8$$

أو بصيغة تكاملية

$$\mathbf{M}_O = [\varepsilon \int_M (y^2 + z^2)\,dm\,]\,\boldsymbol{i} + [\,\omega^2 \int_M xz\,dm - \varepsilon \int_M xy\,dm\,]\,\boldsymbol{j}$$

$$- [\,\omega^2 \int_M xy\,dm + \varepsilon \int_M xz\,dm\,]\,\boldsymbol{k} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{N}_A + \mathbf{r}_{O1} \times \mathbf{N}_{O1} \qquad 2.33.8$$

وبينما يمثل التكامل (المجموع) الأول عزم قصور الجسم الجاسئ حول المحور Ox يمثل التكاملان (المجموعان) الآخران عزمي القصور النابذين بالنسبة للمحاور المناظرة

$$I_{xy} = \int_M xy\,dm\,,\ I_{xz} = \int_M xz\,dm$$

وبالتالي تؤول المعادلات 33.8 إلى الشكل المقتضب التالي

$$\mathbf{M}_O = \varepsilon\, I_x \boldsymbol{i} + [\omega^2 I_{xz} - \varepsilon I_{xy}]\,\boldsymbol{j} - [\omega^2 I_{xy} + \varepsilon\, I_{xz}]\,\boldsymbol{k} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{N}_A + \mathbf{r}_{O1} \times \mathbf{N}_{O1} \qquad 34.8$$

ومن الأهمية بمكان دراسة الحالة التي يكون فيها مستوى الحركة Oyz مستوى تماثل للجسم الجاسئ، ومحور الدوران يمر في مركز الكتلة C. عندئذٍ يتلاشى مُتَّجِهُ الموضع $\mathbf{r}_C$ لمركز الكتلة وكلٌّ من عزمي القصور النابذين I_{xy} و I_{xz}، أي أن $\mathbf{r}_C=0$ ، $I_{xy}=0$ و $I_{xz}=0$. وتؤول المعادلتان 30.8 و34.8 إلى الشكل التالي

$$\mathbf{F} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_{O1} = 0 \qquad 1.30.8$$

$$\mathbf{M}_O = \varepsilon\, I_x \boldsymbol{i} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{N}_A + \mathbf{r}_{O1} \times \mathbf{N}_{O1} \qquad 1.34.8$$

الذي يمكننا استخدام هذه المعادلات في تحديد قيم ردود الأفعال الديناميكية في الدِّعامات والحوامل ونقاط الإرتكاز

أســــــئـلــة مــحــلــولــة

3.6.8 **الحركة المستوية** Plane Motion

تُعرف حركة الجسم الجاسئ بالمســتوية إذا كانت كل جســيماته تتحرك في مستوياتٍ موازيةٍ لمســتوىً محددٍ وثابت. وبالعادة، ومن أجل فهم واستيعاب هذه الحركة نفترض في الجسم الجاسئ مقطعاً رقيقاً S، موازياً للمستوى الإحداثي الثابت $O_1y_1z_1$ من إطار الإسناد القصوري $O_1x_1y_1z_1$ وشاملاً لمركز الكتلة C. كما تتسامت مع المقطع S كل القوى المؤثرة ومتَّجهات السرجهة والتسارع المفترضة، **شكل** 7.8. نثبت في الفراغ إطار الإسناد المتحرك Axyz، إلى المركز (النقطة) A، بحيث يكون المحوران O_1x_1 و Ax متوازيين، والحركة الدورانية تتم حول المحور Ax.

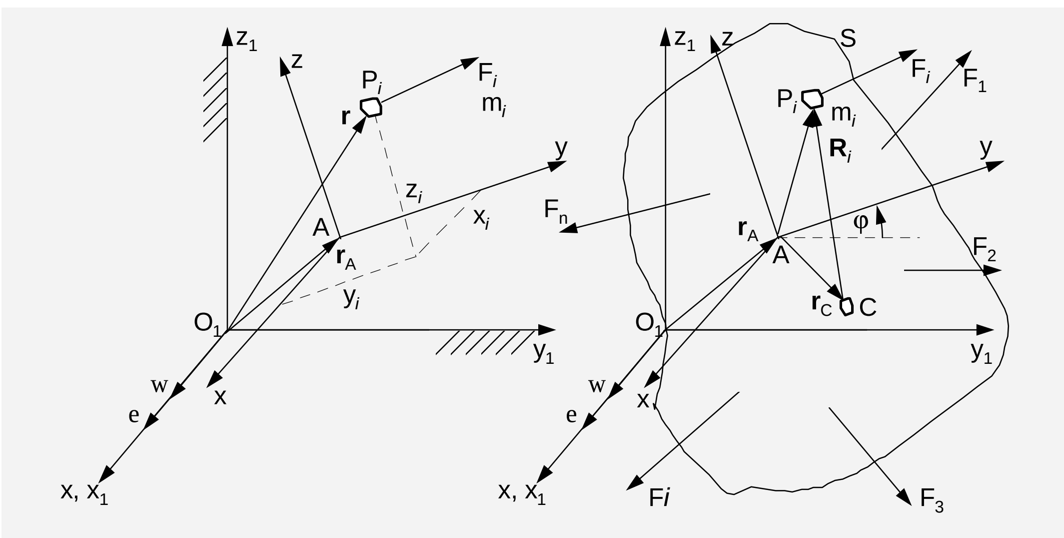
وكما هو معروفٌ من الكينماتيكا، تتحدد حركة الجسم الجاسئ المستوية بثلاث درجات حرية، أي ثلاث حركاتٍ مستقلةٍ بعضها عن بعض. وحيث إن الحركة المستوية هي حركةٌ مركبةٌ من حركتين: انتقالية ودورانية، والحركة بمجملها تتم في مستوى، فإن تحديد قيمتي الإحداثيين x_A و y_A لمركزه كافيان لتحديد الحركة الانتقالية. ولذلك نكتب

$$\mathbf{F} = M(\ddot{y}_A \boldsymbol{j} + \ddot{z}_A \boldsymbol{k}) \qquad 35.8$$

حيث M كتلة الجسم الجاسئ. ويتحدد جزء الحركة الدوراني بالبارامتر المستقل φ كزاوية دورانٍ وحيدةٍ ومفردة. وتبعاً لذلك، نُحدّد متَّجِهَي السرجهة الزاوية والتسارع الزاوي، $w = \omega \boldsymbol{i}$ و $e = \varepsilon \boldsymbol{i}$. وكما هو الحال في الحركة الدورانية، نختار جسيماً منفرداً من جسيمات الجسم الجاسئ في المقطع S كتلته m_i، ومتَّجِه موضعه $\mathbf{r}_i$ ، $\mathbf{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}$. وباستبدال التسارع $\mathbf{a}_i$، انظر المعادلة 1.74.2

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_A + e \times \mathbf{r}_i + w \times (w \times \mathbf{r}_i)$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_A - (y_i\, \omega^2 + z_i\, \varepsilon)\, \boldsymbol{j} + (y_i\, \varepsilon - z_i\, \omega^2)\, \boldsymbol{k} \qquad 36.8$$



شكل 7.8

في معادلة العزم الرئيسي ينتج أن

$$\mathbf{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Ai} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i\ \mathbf{a}_i \qquad 37.8$$

أو

$$\mathbf{M}_A = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}_i + \mathbf{r}_C) \times m_i\ \mathbf{a}_A + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i\ \mathbf{a}_{i\,t} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i\ \mathbf{a}_{i\,n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_C \times m_i\ \mathbf{a}_A + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \times m_i\ \mathbf{a}_A + \sum_{i=1}^{n} m_i\ [\ (y_i^2+z_i^2)\ \varepsilon\ \boldsymbol{i}$$

$$+\ (x_i\ z_i\ \omega^2 - x_i\ y_i\ \varepsilon)\boldsymbol{j}\ -\ (\ x_i\ y_i\ \omega^2 - x_i\ z_i\ \varepsilon)\mathbf{k}] \qquad 1.38.8$$

أو بصيغة تكاملية

$$\mathbf{M}_A = \int_{M_A} d\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_C \times \mathbf{a}_A \int_M dm + \int_M \mathbf{R} \times \mathbf{a}_A dm + [\varepsilon \int_M (y^2 + z^2)\ dm\ ]\boldsymbol{i}$$

$$+\ [\omega^2 \int_M xz\ dm\ - \varepsilon \int_M xy\ dm\ ]\boldsymbol{j} - [\omega^2 \int_M xy\ dm\ +\ \varepsilon \int_M xz\ dm\ ]\boldsymbol{k} \qquad 2.38.8$$

التكامل الأول وفقاً للمعادلة 3.8

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{a}_A \int_M dm = \mathbf{r}_C \times M\mathbf{a}_A$$

بينما التكامل الثاني يساوي الصفر

$$\int_M \mathbf{R} \times \mathbf{a}_A dm = \mathbf{R} \times M\ \mathbf{a}_A = 0$$

لأنَّ R تقاس بالنسبة إلى مركز الكتلة، إذ يناظر كلُّ حدٍ في أحد نصفي الصفيحة S حداً آخر مساوياً له في المقدار ومختلفاً معه بالإشارة. وهذا يؤدي إلى تلاشي تأثير التكامل المذكور، أي أن التكامل يساوي صفراً. عزم قصور الجسم الجاسئ حول المحور Ax

$$I_{Ax} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ [\ (y_i^2+z_i^2)\ = \int_M (y^2 + z^2)\ dm$$

بينما عزوم القصور النابذة للجسم الجاسئ نسبةً للمحاور المتحركة Axyz

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ x_i\ y_i = \int_M xy\ dm\ ,\quad I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ x_i\ z_i = \int_M xz\ dm$$

وعليه تُكتب المعادلتان 38.8 بالشكل المختصر التالي

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_C \times M\ \mathbf{a}_A +\ \varepsilon\ I_{Ax}\ \boldsymbol{i}\ + [\omega^2\ I_{xz} - \varepsilon\ I_{xy}\ ]\ \boldsymbol{j}\ -[\ \omega^2 I_{xy} + \varepsilon\ I_{xz}\ ]\ \boldsymbol{k} \qquad 39.8$$

والتي تمثل مع المعادلة 35.8 معادلات حركة الجسم الجاسئ المستوية إذا كان محور الدوران يمر في نقطةٍ اعتباطيةٍ ليست مركز الكتلة. أمّا إذا كان جزء الحركة الدورانية يتم حول محور يمر عبر مركز كتلة الجسم الجاسئ فإن $\mathbf{r}_C=0$، وتبعا لذلك تؤول المعادلة 39.8 إلى الشكل الأبسط التالي

$$\mathbf{M}_C =\ \varepsilon\ I_{Cx}\ \boldsymbol{i}\ + [\omega^2\ I_{xz} - \varepsilon\ I_{xy}\ ]\ \boldsymbol{j}\ -[\ \omega^2 I_{xy} + \varepsilon\ I_{xz}\ ]\ \boldsymbol{k} \qquad 40.8$$

وتبعاً لذلك، تُستَوْفَى الحركة المستوية للجسم الجاسئ بالمعادلة 35.8، التي تمثل قانون نيوتن الثاني للجسم الجاسئ، مضافاً لها إحدى المعادلتين الاتِّجاهِيَّتين 39.8 أو40.8. ومن الطبيعي أن المعادلتين الأخيرتين تمثلان العلاقة بين العزم الرئيسي للقوى حول المحور Ax أو المحور Cx بدلالة مميزات الحركة الدورانية، التسارع الزاويّ e والسرعة الزاوية w وخصائص الجسم الجاسئ كالتماثل أو عدمه. ولأن عزمي القصور النابذين I_{xy} و I_{xz} يبينان مقدار عدم تماثل لجسم الجاسئ حول مستوى الحركة Ayz (أو Cyz)، فإنَّ تماثل الجسم الجاسئ حول أيٍ من المستويين المذكورين أعلاه ليجعل عزمي القصور النابذين I_{xy} و I_{xz} مساويين للصفر، $I_{xy} = I_{xz} = 0$. وعندئذٍ تؤول المعادلتين الأخيرتين إلى الشكل التالي

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_C \times M\, \mathbf{a}_A + \varepsilon I_{Ax}\, \boldsymbol{i} \qquad 1.39.8$$

$$\mathbf{M}_C = \varepsilon I_{Cx}\, \boldsymbol{I} \qquad 1.40.8$$

ومن الأهمية بمكان دراسة الحالة التي يكون فيها مستوى الحركة Ayz مستوى تماثل للجسم الجاسئ، مضافاً إلى ذلك أن محور الدوران يمر في مركز الكتلة C. عندئذٍ يتلاشى مُتَّجِهُ الموضع $\mathbf{r}_C$ لمركز الكتلة، وعزما القصور النابذين I_{xy} و I_{xz} مساويين للصفر، أي أن $\mathbf{r}_C = 0$ و $I_{xy} = I_{xz} = 0$. وتؤول المعادلتان 35.8 و 39.8 قياسياً إلى الشكل التالي

$$F_x = 0\,,\ F_y = M\,\ddot{y}_{Ay}\,,\ F_z = M\,\ddot{y}_{Az} \qquad 1.35.8$$

$$M_{Ax} = \varepsilon I_{Ax}\,,\ M_{Ay} = 0\,,\ M_{Az} = 0 \qquad 2.40.8$$

أسـئـلـة مـحـلـولـة

7.8 الزَّخَمُ الزَّاوِيُ للنظام

لقد ورد مفهوم الزَّخَمُ الزَّاويّ للجسيم في البندين 1.5 و3.5، وبإضافة الرمز i للمعادلة 3.5 فإن الزَّخَمُ الزَّاويّ للجسيم i

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

اعتبر فئة من الجسيمات عددها n، كتلها m_1، m_2، ..... ، m_n ومتجهات مواضعها $\mathbf{r}_1$، $\mathbf{r}_2$، .... ، $\mathbf{r}_n$. المجموع الاتجاهي لزِخَام جميع جسيمات الجسم الجاسئ بالنسبة إلى نقطة الأصل يمثل الزخم الزاوي لنظام الجسيمات

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times (w\times\mathbf{r}_i)$$

وباستبدال $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i$ ، **شكل** 2.8، نكتب الزخم الزاوي للنظام

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i)\times m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_C\times m_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \qquad 41.8$$

أو كمجموعين: المجموع الأول، فبعد ترتيبه وربطه بالمعادلة 5.8، يساوي الزخم الزاوي لكتلة النظام M مركزةً في مركز كتلته C عندما تتحرك بالسرجهة $\boldsymbol{v}_C$

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_C \times \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{r}_C \times M \boldsymbol{v}_C \qquad 1.42.8$$

والمجموع الثاني، نستخدم المعادلة 68.2، والتي تربط بين سرجهتي مركز الكتـــلة وسرجهة الجسيم المختار، $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{iC}$، فنكتب

$$\mathbf{L}_\rho = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{i\,C}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{v}_{i\,C} + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{v}_C$$

أو كمجموعين جديدين: أولهما ، يشكل مجموع الزِّخَام الزَّاوِيَّة لكل جسيمات النظام بالنسبة إلى مركز الكتلة

$$\mathbf{L}_\rho = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{v}_{i\,C} \qquad 2.42.8$$

وثانيهما، حاصل ضرب العزم الاستاتيكي لمجموع كتل جسيمات النظام ومتجهات مواضعها يساوي صفراً، لأن $\mathbf{r'}_C=0$، وأيضاً بالقياس على معادلة 4.8، أي أن $\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i = M\mathbf{r}'_C = 0$. وبالتالي يكون الزخم الزاوي الكلي للنظام مساوياً للمجموعين الواردين في المعادلتين 42.8

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_C \times M\boldsymbol{v}_C + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{v}_{i\,C} \qquad 43.8$$

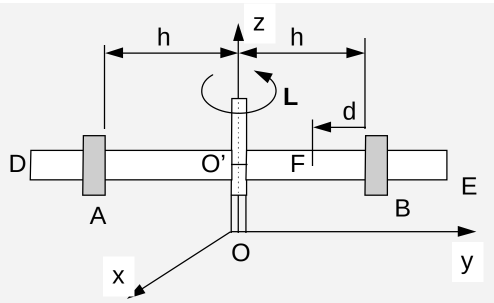
هذه المعادلة 43.8 تبين أن **الزَّخَمَ الزَّاوِيُّ للنظام بالنسبة إلى نقطةٍ ثابتة، مركز إطار الإسناد القصوري O، يساوي الزَّخَمَ الزَّاوِيُّ لكتلة النظام الكلية M، مركزةً في مركز كتلته C، عندما تتحرك بسرجهة مركز الكتلة $\boldsymbol{v}_C$، مضافاً إليه مجموع الزِّخَام الزَّاوِيَّة لكل جسيمات النظام بالنسبة إلى مركز كتلة النظام.**

اعتبر الآن ماذا يحدث إذا تغيرت نقطة الأصل للنظام الإحداثي. يتضح من **الشكل** 2.8، أن متجه الموضع لمركز الكتلة $\mathbf{r}_c$ يتغير، بينما لا تتغير متجهات الموضع النســبية $\mathbf{r}'_i$، كما لا تتغير مشـــتقاتها الزمنية. وعلى ذلك، ففي التعبير العام للزخم الزاوي للنظام، معادلة 43.8، يعتمد الحد الأول على موقع نقطة الأصل، كنقطة الإســـناد لتعريف الزخم الزاوي؛ بينما لا يعتمد الحد الثاني على النقطة المذكورة. وفي سياق ذلك ؛ نستطيع إدراج النظرية التالية: **إذا كان مركز كتلة نظام ما من الجسيمات في حالة سكون فإن زَخَمَهُ الزَّاوِيُّ يظل على حاله بالنسبة إلى جميع نقاط الإسناد.** ولإثبات صحة هذه النظرية، سنعتمد الحالة الخاصة فقط التي يكون فيها مركز الكتلة ساكناً. عندئذ يتلاشى الحد الأول في المعادلة 43.8 ويكون الزَّخَم الزَّاوِّي الكلي مساوياً للحد الثاني الذي لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل. وللتعبير عن ذلك بصورة أخرى نقول: **إذا كان مركز الكتلة ساكناً، فإنه يمكن حساب الزَّخَمُ الزَّاويّ بالنسبة إلى أية نقطةٍ إسنادٍ وتكون النتيجة واحدةً في جميع الحالات.**

مثال 1.8

يمكن التدليل على النتيجة العامة السابقةِ بمثالٍ بسيط لنظام مكونٍ من جسيمين فقط، **شكل** 8.8. فالجسيمان A و B متساويا الكتلة، كتلة كل منهما m، وسرعته v. وهما على البعد نفسه من مركز كتلتهما الساكن O'، الواقع على المحور Oz. وبذلك يكون مقدار الزَّخَمُ الزَّاويَ للجسيمين A و B، بالنسبة إلى المحور Oz

$$L_A = L_B = m\,v\,h$$



شكل 8.8

وبما أن للزَّخمين الزَّاويين الاتجاه نفسه، موازٍ للمحور Oz وللأعلى، فإن مقداري المتجهين يجمعان عددياً للحصول على المقدار الكلي

$$L = L_A + L_B = 2\,m\,v\,h$$

ويساوي هذا المقدار الزَّخمُ الزَّاويّ الكلي لزوج الجسيمات A و B بالنسبة إلى النقطة الواقعة في منتصف المسافة بينهما. اعتبر الآن نقطة إسنادٍ تقع عند موضع أحد الجسيمين. فلا يكون لهذا الجسيم زخم زاويّ بالنسبة إلى موقعه ذاته $\mathbf{r} = 0$. أما الجسيم الثاني الذي يبعد الآن المسافة 2h، فيكون زخمه الزَّاويّ $2\,m\,v\,h$، ويكون مجموع الزخمين الزاويين $2\,m\,v\,h$ مرة ثانية. وأخيراً، إذا اخترنا النقطة F على الدليل DE بحيث تبعد المسافة d عن الجسيم B. فيكون الزّخمان الزاويّان للجسيمين A و B ، بالنسبة إلى هذه النقطة الإسنادية

$$L_A = m\,v\,(2h - d)\,,\; L_B = m\,v\,d$$

ليكون للمجموع مرة أخرى نفس القيمة

$$L = L_A + L_B = m\,v\,(2h - d) + m\,v\,d = 2\,m\,v\,h$$

الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري والزَّخَم الزَّاوِيُّ المِغزَلي

وفْقَاً للمعادلة 43.8 يمكن تقسيم الزَّخَم الزَّاوِيُّ الكلي لنظام ما إلى جزأين مختلفي الشكل تماماً. يحتوي الجزء الأول على الكتلة الكلية فقط والخواص الكينماتيكية لمركزها، ويسمى الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداريّ أو الدوراني Orbital. وأما الجزء الثاني فهو الزَّخَم الزَّاوِيُّ للنظام بالنسبة إلى مركز كتلته؛ ويسمى هذا بالزَّخَم الزَّاوِيُّ المِغزَلي أو غالباً مجرد الغَزْل Spin. ولتلخيص النتائج السابقة باستخدام هذين الاسمين ومعادلة 43.8 نجد أن

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_C \times M\boldsymbol{v}_C + \sum_{i=1}^{n} m_i\ \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{v}_{iC} = \mathbf{L}_{orb} + \mathbf{L}_{spin}$$

حيث إن

$$\mathbf{L}_{orb} = \mathbf{r}_C \times M\,\boldsymbol{v}_C \qquad 44.8$$

الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري؛ بينما

$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{v}_{iC} \qquad 45.8$$

الزَّخَم الزَّاوِيُّ المغزلي. والغَّزْل هو الزَّخَم الزَّاوِيُّ لنظام محسوباً بالنسبة إلى مركز الكتلة، سواءً كان المركز ساكناً أو متحركاً؛ إذ إنه خاصيةٌ ذاتيةٌ للنظام، مستقلةٌ عن نقطةِ إسنادِ المشاهد. فإذا كان جسمٌ ما - مثلاً خُذْرُوفٌ أو مروحةُ طائرةٍ جاثيةٍ في موقفها - يدور حول محورٍ ساكنٍ يمر عبر مركز كتلته/ها، فإن زخمه الزَّاوِيَّ يكون مساوياً لزخمه الزَّاوِيَّ الكلي. وبصورة أعَّمَ ؛ فقد يكون مركز الكتلة متحركاً، وفي هذه الحالة يكون الغَّزْل فقط جزءاً من المجموع. على كل حال، فإن الغزل ذاته مستقلٌ عن الحركة الجِرْمِيَّة. فالزَّخَم الزَّاوِيّ المغزلي للأرض، مثلاً، لا يعتمد على السرعة المدارية للأرض؛ ويحسب كما لو كان محور الأرض ساكناً.

إن التشابه واضح بين المعادلة 44.8 التي تعرف الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري لنظام، والمعادلة 3.5، التي تعرف الزَّخَم الزَّاوِيُّ لجسم مفرد. وعلى ذلك، نستطيع القول إن الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري لنظام يساوي الزَّخَم الزَّاوِيُّ لجسيم، كتلته M مُركَزٌ في مركز الكتلة. ولذلك حتى نحسب الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري للأرض بالنسبة إلى الشمس، مثلاً، تستبدل الأرض بجسيم كتلته كتلة الأرض M_E، موضوعٌ عند مركزها. وبما أن الزَّخَم الكلي لنظام يساوي $M\boldsymbol{v}_C$، معادلة 29.8، فإنه يمكن تعريف الزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري بالعلاقة

$$\mathbf{L}_{orb} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{K}$$

التي تشبه إلى حد كبير المعادلة الواردة في الباب الخامس للجسيم المفرد $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{K}$. فالزَّخَم الزَّاوِيُّ المداري، مثله مثل الزَّخَم الزَّاوِيِّ لجسيم، يعتمد على نقطة الإسناد المختارة.

مثال 2.8

دُحْرَاجٌ أسطواني، كتلته m ، ونصف قطره R، يتدحرج على سطح أفقيٍ أملس بسرعة $\boldsymbol{v}$، وبخط سير موازٍ للمحور Oy ، **شكل** 9.8 . في اللحظة التي تبعد فيها نقطة تلامس الدحراج (مسقط مركز كتلته على المستوى الأفقي) عن نقطة الأصل المختارة O المسافة L، أوجد الزَّخَم الزَّاوِيّ الدوراني والمغزلي، بالنسبة إلى نقطة الأصل المختارة؟ وما زَخَمَه الزّاوِيّ الكلي؟

المعطيات : $L = \sqrt{2}$ [m]، $\boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{j}$ [m/s]، m = 50 [kg] و R = 50 [cm].

الــحــل

نحدِّد خواص مركز الكتلة الكينماتيكية

$$\mathbf{r}_C = L\cos45°\boldsymbol{i} + L\sin 45°\,\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k} = 1.42\cos 45°\,\boldsymbol{i} + 1.42\sin 45°\,\boldsymbol{j} + 0.5\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{r}_C = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 0.5\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_C = 2\,\boldsymbol{j}\ [m/s]$$

وبذلك يكون الزخم الزاوي المداري، معادلة 44.8

$$\mathbf{L}_{orb} = M\,\mathbf{r}_C \times \boldsymbol{v}_C = 50 \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -50\,\boldsymbol{i} + 100\,\boldsymbol{k}\ [\mathrm{kgm^2/s}]$$

وهذا متَّجِهٌ مقداره 106.83 كيلوغرام متر تربيع لكل ثانية، يميل تقريباً بالزاوية 26.56^{o} عن الاتجاه الرأســي، وهو عمودي على كلٍ من المتجهيين $\boldsymbol{v}_C$ ، $\mathbf{r}_C$. ولإيجاد الزَّخَم الزَّاوِّي المغزلي L_{spin}، فنعتبر الحركة بالنسبة إلى مركز الكتلة. حركة الدحراج دائريةً ومنتظمة، ويقع كل عنصر كتلة على نفس البعد عن مركز الكتلة، كما يتحرك كل عنصر كتلة نسبة إلى مركز الكتلة بنفس السرعة، وتتعامد سرجهة هذا العنصر مع نصف القطر ρ في نفس النقطة، **شكل** 9.8. وعليه؛ ومن المعادلة 45.8 يكون حاصل الضرب الاتجاهي $r_i \times \boldsymbol{v}_{ic}$ هو نفسه لكل عنصر كتلة . وهكذا فالزَّخَم الزَّاوِّي المغزلي يساوي المجموع

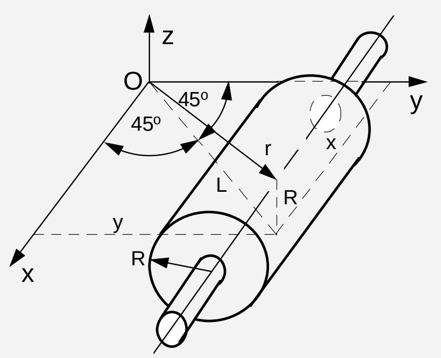
$$\mathbf{L}_{spin} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i \times \boldsymbol{v}_{i\ c} = M\ r \times \boldsymbol{v}_c$$

وهذا متجه في الاتجاه السالب لمحور Ox، ومقداره $|\mathbf{L}_{spin}| = M\rho \times v_c$

$$\mathbf{L}_{spin} = 50 \times 0.50 \times 2 = -50\,\boldsymbol{i}\ [\mathrm{kgm^2/s}]$$

وهو؛ بالطبع لا يعتمد على موقع نقطة الأصل. أما الزخم الزاوي الكلي فيكون

$$\mathbf{L} = -100\,\boldsymbol{i} + 100\,\boldsymbol{k}\ [\mathrm{kgm^2/s}]$$



شكل 9.8

1.7.8 تَغَيُّر الزَّخَم الزَّاوِيّ للأنظمة والأجسام الجاسئة

لقد تم تعريف الزَّخَم الزَّاوِّي للجسيم في بند 1.5. وفي البند 7.8 تم تعريف مفهوم الزَّخَم الزَّاوِيّ للأنظمة. وبشكل عام يعرف الزَّخَم الزَّاوِيّ للجسيم بدلالة زخمه وموضعه. لقد أصبح واضحاً أن الزَّخَم الزَّاوِيّ مفهومٌ اتِّجَاهِي ، وإتجاهه هو الاتجاه المحوري الذي يعرف بقاعدة اليد اليمنى. والزَّخَم الزَّاوِيّ لنظام معين هو المجموع الاتجاهي للزِّخام الزَّاوِيَّة للجسيمات المكونة للنظام. لكن هناك أسئلة مهمة تتطلب الإجابة: تحت أي ظرفٍ يكون الزَّخَم الزَّاوِيّ محفوظاً؟ وماذا نحتاج لتغير الزَّخَم الزَّاوِيّ لنظام؟ ثم ما هو قانون تغير الزَّخَم الزَّاوِيّ؟ إن الإجابة على السؤال الأخير تعطي الإجابة على السؤالين الأوليين.

والحقيقة أن الزَّخَم الزَّاوِيّ يعرف رياضياً بدلالة مفاهيم معروفة. ولذلك يمكن اشتقاق قانون تغيره رياضياً من قوانين نيوتن دون الحاجة إلى أساس تجريدي جديد. فنبدأ من معادلة 8.5 للجسيم $\boldsymbol{i}$ مع إضافة مجموعة القوى الداخلية المؤثرة على هذا الجسيم

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{M}_i + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \mathbf{M}\left(\mathbf{F}_{ij}\right)$$

وبكتابة نفس المعادلة لكل جسيمات النظام $\boldsymbol{i}$ =1,2,.......,n، ثمَّ جمع المعادلات الناتجة هندسياً نحصل على

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\mathbf{L}_i}{dt}=\mathbf{M}_F+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\mathbf{M}(\mathbf{F}_{ij})$$

أو بشكلٍ مختصر

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{M}_F \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{L}}=\mathbf{M}(\mathbf{F}) \qquad 46.8$$

حيث يساوي المجموع الثاني صفراً ، انطلاقاً من الخاصية الثانية للقوى الداخلية. وتمثل المعادلة 46.8 قانون تغير الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام بصورة تفاضلية: **معدل تغير الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام يساوي عزم الدوران للقوى المؤثرة عليه حول نفس المركز**. ومن الطبيعي أن نُسْنِدَ كلاً من الزَّخَم الزَّاوِيّ وعزم الدوران إلى نقطة الأصل نفسها.

وتكمن أهمية قانون تغير الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام، **معادلة** 46.8 عند دراسة الحركة الدوانية للجسم والنظام بشكلٍ عام، كحركة الجيروسكوب gyroscope ونظرية الصدمة impact، إذ يتم حذف كل القوى الداخلية للنظام غير المعروفة أصلاً.

2.7.8 قانون حفظ الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام

إذا كان عزم الدوران لكل القوى المؤثرة على النظام المعين يساوي صفراً، فإن الزَّخَم الزَّاوِيّ للنظام يكون ثابتاً مقداراً واتجاهاً

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}=\text{const.} \qquad 47.8$$

أي أن الزَّخَم الزَّاوِيّ لنظام يثبت مقداراً واتجاهاً عندما يتلاشى عزم الدوران الخارجي. وكما هو معروفٌ، ينشأ العزم الخارجي من خارج النظام بينما ينشأ العزم الداخلي من داخل النظام، وهذا الأخير يساوي صفراً. فغواص هوائي هابطٌ من طائرةٍ في الهواء، مثلاً، يبدأ بالدوران حول نفسه بعد مرور بعض الوقت من قفزته. وهذا الدوران لا يحدث من حركة عضلاته أو أطرافه بل بسبب عزومٍ أثر بها الهواء على الغواص. ولو سقط الغواص في فراغ خالٍ من الهواء، لما استطاع تغيير زخمه الزَّاويّ بواسطة أي التواءٍ لجسمه على الإطلاق.

وإذا كان عزم الدوران الرئيسي للقوى الخارجية المؤثرة على النظام ذا قيمةٍ محددة، لكن إحدى مركباته صفراً، $M_{fz}=0$ مثلاً، فإن ذلك يستلزم أن مركبة الزَّخَم الزَّاوِيّ على المحور Oz تساوي مقداراً ثابتاً

$$\frac{dL_z}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad L_z=\text{const.} \qquad 1.47.8$$

[5] **الجيروسكوب**: أداة تستخدم لحفظ توازن الطائرة أو الباخرة ولتحديد الاتجاه.....الخ. أنظر المورد.

أسئلة محلولة

8.8 الطاقة الحركية للأنظمة وللجسم الجاسئ

1.8.8 الطاقة الحركية للنظام

الطاقة الحركية لنظام هي الكمية القياسيةٌ المكافئة لمجموع الطاقات الحركية لمكوناته الجزئية. وحيث أنه من غير الممكن أبداً أن تكون سالبةً، فإن أي طاقتين حركيتين تأتلفان معاً لتعطيا طاقةً حركيةً أكبر. ويكون للنظام طاقةً حركيةً صِفرية فقط إذا كانت جميع مكوناته الجزيئية ساكنة. غير أن الطاقة الحركية لنظام ما لتتسم بسِمَةٍ بسيطةٍ واحدة، إذ يمكن فصلها إلى جزأين: طاقة الحركة الداخلية وطاقة الحركة الجِّرْمِيَّة. وباستبدال $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{iC}$ من المعادلة 68.2، و**شكل** 8.2، فإن طاقة حركة النظام تساوي مجموع الطاقات الحركية لكل الجسيمات المكونة له

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{iC}) \cdot (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{iC})$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{v}_C^2 + 2\, \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{v}_{iC} + \boldsymbol{v}_{iC}^2)$$

أو كثلاثة مجاميع

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 2\, m_i\, \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{v}_{iC} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_{iC}^2 \qquad 49.8$$

المجموع الأول

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_C^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_i \right\} v_C^2 = \frac{1}{2} M v_C^2 \qquad 1.50.8$$

يمثل الطاقة الحركية الانتقالية للنظام، وهو يساوي نصف حاصل ضرب كتلة النظام الكلية ومربع سرعة مركز كتلته. أمّا المجموع الثاني فيساوي صفراً، قياساً على المعادلة 4.8. إذ يمكن كتابته على الصورة

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 2 m_i\, \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{v}_{iC} = \boldsymbol{v}_C \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \boldsymbol{v}_{iC} = 0 \qquad 2.50.8$$

وأخيراً، يساوي المجموع الثالث الطاقة الحركية لجسيمات النظام الناتجة من حركاتها الداخلية كاهتزاز الجزيئات، وهذه تساوي صفراً. وباختصار؛ فإن طاقة حركة النظام

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_{iC}^2 \qquad 50.8$$

ومن هذه المعادلة يمكن صياغة النظرية التالية التي صاغها **كينيج** K.nig: **طاقة حركة النظام عند حركته المطلقة تساوي طاقة الحركة الانتقالية لمركز كتلته مضافاً إليها طاقة حركة كل الجسيمات المكونة للنظام عند حركتها النسبية بالنسبة إلى مركز الكتلة.**

2.8.8 الطاقة الحركية للجسم الجاسئ

إذا كان الجسم الجاسئ مركباً من فئة من الجسيمات، عددها n، $n\to\infty$، كتلها m_i، متَّجِهَات مواضعها $\mathbf{r}_i$ وسرجهاتها $\boldsymbol{v}_i$، $i = 1,2,...,n$، فإن طاقة الجسم الجاسئ الحركية تُعَرَّفُ رياضياً بالمجموع الهائل

$$T = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{v_i^2}{2} \qquad 1.51.8$$

وإذا كنا نعالج توزيعاً مستمراً للكتلة، فإن هذا المجموع يؤول إلى التكامل

$$T = \frac{1}{2}\int_M v^2\, dm \qquad 2.51.8$$

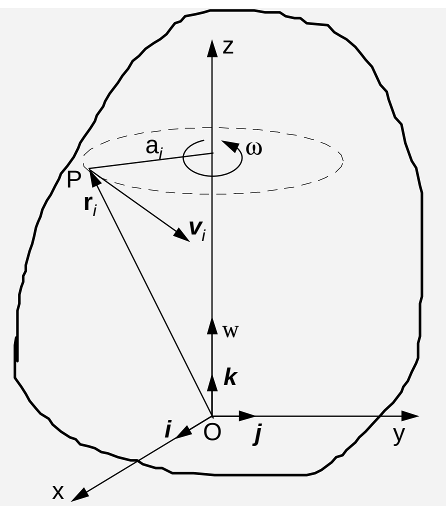
وهذا تكاملٌ محدود ينبغي أن يشمل حدّاه الجسم بأكمله M. ونستطيع تمييز الحالات الخاصة التالية:

الحركة الانتقالية

إذا كان الجسم الجاسئ يتحرك حركةً انتقاليةً فإن كل جسيمٍ فيه يعاني نفس الإزاحة ويتحرك بنفس السرجهة؛ أي سرجهة مركز الكتلة. وعليه فإن الطاقة الحركية الكلية

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 \qquad 52.8$$

والتي تكافئ الطاقة الحركية لجسيمٍ مفرد، كتلته M وسرعته v_C.



شكل 10.8

الحركة الدورانية حول محور ثابت

إذا كان الجسم الجاسئ يدور حول محور ثابت، Oz مثلاً، فإن كل جسيماته (عناصر كتلته) ستدور في مدارات دائرية حول المحور نفسه، شكل 10.8. ويمكن التعبير عن السرعة v_i للجسيم الاعتباطي بدلالة مضروب بعده عن محور الدوران a_i في السرعة الزاوية ω لدوران الجسم الجاسئ، $v_i = a_i\,\omega$. وعليه تكتب المعادلة 1.51.8 بصيغة مغايرة

$$T = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{v_i^2}{2} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m_i\to 0}} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(a_i\,\omega\right)^2$$

$$T = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m_i\to 0}} \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n} m_i\, a_i^2\right\}\omega^2 \qquad 1.53.8$$

وتؤول المعادلة الثانية 2.51.8 إلى تكامل آخر

$$T = \frac{1}{2}\int_M v^2\, dm = \frac{1}{2}\int_M (a\omega)^2\, dm = \frac{1}{2}\left\{\int_M a^2\, dm\right\}\omega^2 \qquad 2.53.8$$

ليتبين لنا أن معاملي المعادلتين 53.8، وهما المجموع في المعادلة الأولى والتكامل المحدود في المعادلة الثانية، يمثلان في الوقت نفسه عزم قصور الجسم الجاسئ أو النظام ذي الفئة المتميزة (المتقطعة) من الجسيمات $I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i^2$ ، أو عزم قصور جسم مستمر (متصل) للمادة $I_z = \int_M a^2\, dm$. ولهذا نكتب

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad 54.8$$

ومن السهولة بمكان اشتقاق علاقةٍ مهمة بين عزم الدوران ومعدل تغير الطاقة الحركية. ونقطة البداية هي قانون تغير الزَّخَم الزَّاوِيّ، معادلة 46.8. فلحركة الجسم الجاسئ الدورانية حول المحور Oz يكون الزَّخَم الزَّاوِيّ مساوياً لحاصل ضرب عزم القصور في السرعة الزاوية $L_z = I\omega$، وتكون مركبة z للمعادلة المذكورة 46.8

$$\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_z = \left.\mathbf{M}_F\right|_z \Rightarrow \frac{d(I\omega)}{dt} = M_{Fz}$$

وبعد ضرب الطرفين في السرعة الزَّاويّة وترتيبهما

$$\frac{d(I\omega^2/2)}{dt} = M_z\,\omega$$

أو

$$\frac{dT}{dt} = P \qquad 55.8$$

أي أن معدل تغير الطاقة الحركية يساوي القدرة، ولذلك نحصل على تعبيرٍ للقدرة التي يبذلها عزم الدوران على جسمٍ جاسئ

$$P = M_z\,\omega \qquad 56.8$$

لاحظ التشابه الواضح بين المعادلة 56.8 والمعادلة 19.8. هذا وقد لُخصت الصيغ المتناظرة للحركتين الانتقالية والدورانية في الجدول 1.8.

الكمية الفيزيائية	صيغة الحركة الانتقالية	صيغة الحركة الدورانية
التسارع	$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$	$M_z = I_z\varepsilon = I_z\frac{d\omega}{dt}$
الطاقة الحركية	$T = \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
الشغل	$dA = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$	$dA = M_z\, d\varphi$
القدرة	$P = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{v}$	$P = M_z\,\omega$

جدول 1.8 : الصيغ المتناظرة للحركتين الانتقالية والدورانية

الحركة المستوية

يمكن تمثيل الحركة المستوية كمجموع حركتين إحداها انتقالية والأخرى دورانية. لذلك فطاقة حركة الجسم الجاسئ تساوي المجموع الجبري لطاقة الحركة الانتقالية لمركز الكتلة $\frac{1}{2}Mv_C^2$ وطاقة الحركة الدورانية للجسم حول مركز كتلته $\frac{1}{2}I_C\,\omega^2$. أو رياضياً

$$T = \frac{1}{2}M\,v_C^2 + \frac{1}{2}I_C\,\omega^2 \qquad 57.8$$

حيث I_C عزم قصور الجسم الجاسئ حول محور الدوران المار في مركز الكتلة C.

3.8.8 قانون تغير طاقة حركة النظام

إن القانون الذي سبق إثباته في البند 5.5 للجسيم المادي، والمعادلات 23.5 - 25.5 يسري بصورة صحيحة لكل جسيمٍ من جسيمات النظام الميكانيكي. وبالتالي؛ إذا درسنا حركة جسيم ما من جسيمات النظام، i مثلاً، كتلته m_i، وسرجهتاه في اللحظتين الابتدائية والنهائية v_{io} و v_i. عندئذ؛ بإضافة الرمز السفلي i لقانون التغير في طاقة حركة الجسيم بصورته التكاملية، معادلة 1.24.5، نحصل على

$$\frac{1}{2}m_i\,v_i^2 - \frac{1}{2}m_i\,v_{io}^{\,2} = A_{ii} + A_{ie} \qquad 58.8$$

حيث يعرّف المقدار A_{ii} شغل كل القوى الداخلية المؤثرة على الجسيم i من باقي الجسيمات في النظام، بينما A_{ie}، شغل كل القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم نفسه. لقد أضيف شغل القوى الداخلية A_{ii} إلى شغل القوى الخارجية A_{ie} في المعادلة 1.24.5، لأن كل القوى المؤثرة من جسيمات النظام الأخرى $i \neq j = 1,2,....n$ على الجسيم قوىً خارجية.

وللنظام المكون من مجموعةٍ من الجسيمات، عددها n ، $i = 1,2,3,....n$ ، كتلها m_i، وسرجهاتها v_i فإن كتابة المعادلة 58.8 لكل جسيمٍ من جسيماته، ومن ثَمَّ جمع كل المعادلات الناتجة حداً حداً يعطي

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,v_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,v_{io}^2 = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} A_{ie}$$

أو بشكل أكثر اقتضاباً

$$T - T_o = A_i + A_e \qquad 59.8$$

حيث إن T_o و T المجموعان الجبريان لطاقتي حركة نظام الجسيمات في اللحظة الابتدائية t_o والمعينة t بالترتيب

$$T_o = \sum_{i=1}^{n} m_i\,v_{io}^2 \quad , \quad T = \sum_{i=1}^{n} m_i\,v_i^2$$

من جهةٍ أخرى، يمثل الرمز A_i الشغل الكلي لجميع القوى الداخلية المؤثرة على جسيمات النظام $A_i = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ ، أما الرمز A_e فيمثل الشغل الكلي لجميع القوى الخارجية المؤثرة على النظام $A_e = \sum_{i=1}^{n} A_{ie}$.

وعلى هذا الأساس تعرف المعادلة 58.8 قانون تغير طاقة حركة النظام بصورة تكاملية: **تغير الطاقة الحركيه لنظام جسيماتٍ معين عند معاناته إزاحةً ما يُساوي مجموع الشغل الكلي الذي تبذله كل القوى الخارجية والداخلية المؤثرة على النظام في هذه الإزاحة.**

ويمكن التعبير عن هذا القانون بدلالة التغير في طاقة النظام الحركية؛ من معادلة 23.5 التي تسري على أي جسيم من جسيماته

$$d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = dA_{i\,i} + dA_{i\,e}$$

وحيث أن الجسيم i أختير بشكل اعتباطي، فإن كتابة المعادلة المذكورة أعلاه لكل جسيمٍ من جسيمات النظام وجمعها حداً حداً ينتج المعادلة

$$d\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = d\sum_{i=1}^{n} A_{i\,i} + d\sum_{i=1}^{n} A_{i\,e} \qquad 1.60.8$$

أو

$$dT = dA_i + dA_e \qquad 2.60.8$$

والتي تعبر عن قانون تغير الطاقة الحركية للنظام بصورة تفاضلية: **المشتقة الأولى لطاقة حركة النظام تساوي الشغل الكلي المبذول على جميع أجزاء النظام خلال الفترة الزمنية المعينة.**

أسئـــــلـــةٌ مـــحـــلـــولـــــــــة

تنبيـــــــه: سنعتبر البكرات عديمة الــوزن وملــساء والحبـــال عديمـــة الـــوزن والاســـتطالة مـــا لـــم يـــرد عكس ذلك.

9.8 مبدأ دالمبير لنظام الجسيمات المقيد

يمكن تعريف وكتابة المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم المقيد استناداً إلى **مبدأ دالمبير**. إذ يجب تحرير الجسيم من قيده، وإضافة قوة رد فعله وقوة قصوره المناظرة إلى القوة المؤثرة على الجسيم والتي يساوي مجموعها الهندسي صفراً. لنعتبر نظاماً، ذا فئة جسيمات عددها n، والجسيم i، كتلته m_i من هذا النظام، مختارٌ بشكلٍ اعتباطي. تؤثر على الجسيم القوة الخارجية $\mathbf{F}_i$ وقوة رد فعل القيد R_i. فطبقاً ل**مبدأ دالمبير** أو معادلة 54.4 بعد إضافة الرمز i لمتغيراتها يكون

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i,\text{in}} + \mathbf{R}_i = 0 \qquad 61.8$$

وبتكرار العملية لكل جسيمات النظام، وجمع المعادلات الناتجة حداً حداً نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_{i,\text{in}} + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}_i = 0 \qquad 62.8$$

أو

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{in}} + \mathbf{R} = 0 \qquad 63.8$$

حيث إن $\mathbf{F}$ محصلة (المتجه الرئيسي لكل) القوى الخارجية المؤثرة على نظام الجسيمات $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i$، و $\mathbf{R}$ محصلة ردود أفعال القيود الخارجية المؤثرة على النظام $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}_i$، وأخيراً $\mathbf{F}_{\text{in}}$ محصلة قوى قصور جسيمات النظام $\mathbf{F}_{\text{in}} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_{i,\text{in}}$. هاتان المعادلتان 62.8 و 63.8 تمثلان **مبدأ دالمبير** لنظام الجسيمات المقيد:

في كل لحظةٍ زمنيةٍ أثناء حركة النظام المقيد يكون المجموع الهندسي للمتجهات الرئيسية الثلاث، القوة الخارجية $\mathbf{F}$ وقوة رد فعل القيود الخارجية $\mathbf{R}$ المؤثرتان على نظام الجسيمات المتحرك وقوةَ قصوره $\mathbf{F}_{\text{in}}$ مساوياً للصفر.

من جهةٍ أخرى؛ إذا حدّد متجه موضع الجسيم i بالمتَّجِه $\mathbf{r}_i$، المقاس من مركز الإطار القصوري الثابت O؛ فإن حاصل ضرب هذا المتجه في المعادلة الإتجاهية 62.8 من الجهة اليسرى يكون

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,\text{in}} + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}_i = 0 \qquad 64.8$$

أو بشكلٍ مختصر

$$\mathbf{M}_F + \mathbf{M}_{\text{in}} + \mathbf{M}_R = 0 \qquad 65.8$$

حيث أن $\mathbf{M}_F$ عزم الدوران الرئيسي لمحصلة القوى الخارجية المؤثرة على نظام الجسيمات $\mathbf{M}_F = \mathbf{F} \times \mathbf{r}_F$، ويساوي محصلة عزوم الدوران لكل القوى الخارجية المؤثرة على جسيمات النظام بالنسبة للمركز الثابت O، $\mathbf{M}_F = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_i$ و $\mathbf{M}_R$ العزم الرئيسي لمحصلة ردود أفعال القيود الخارجية $\mathbf{M}_R = \mathbf{R} \times \mathbf{r}_R$ ، ويساوي محصلة

عزوم كل ردود أفعال القيود الخارجية المؤثرة على النظام بالنسبة للمركز الثابت $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \times \mathbf{r}_i$ ، وأخيراً $\mathbf{M}_{in}$ العزم الرئيسي لمحصلة كل قوى قصور جسيمات النظام $\mathbf{M}_{in} = \mathbf{F}_{in} \times \mathbf{r}_i$، ويساوي محصلة عزوم كل قوى قصور جسيمات النظام بالنسبة للمركز الثابت $\mathbf{M}_{in} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{i,in} \times \mathbf{r}_i$. ولهذا ؛ استناداً إلى المعادلة 5 يمكن القول: **في كل لحظةٍ زمنيةٍ أثناء حركة النظام المقيد يكون المجموع الهندسي لعزم الدوران الرئيسي للقوى المؤثرة $\mathbf{M}_F$ والعزم الرئيسي لقوى ردود أفعال القيود الخارجية $\mathbf{M}_R$ المؤثرة على النظام المتحرك مضافاً إليهما العزم لقوى قصوره $\mathbf{M}_{in}$ مساوياً للصفر.**

ويمكن دراسة الحالة الخاصة لمعادلة 63.8، وذلك لنظام الجسيمات غير المقيد بقيودٍ خارجية، حينئذٍ؛ يتلاشى المجموع الثالث، $\mathbf{R} = 0$. وتؤول نفس المعادلة إلى الشكل المختصر

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{in} = 0 \qquad 66.8$$

كما يتلاشى المجموع الثالث في المعادلة 65.8 ، $\mathbf{M}_R = 0$، وتؤول المعادلة المذكورة إلى الشكل التالي

$$\mathbf{M}_F + \mathbf{M}_{in} = 0 \qquad 67.8$$

حيث تمثل المعادلة 66.8 قانون نيوتن الثاني لنظام الجسيمات الحر، لتكافئ أيٍ من المعادلتين 9.8 أو 10.8، بينما تمثل المعادلة 67.8 قانون تغير الزخم الزاوي لنظام الجسيمات، والتي تكافئ المعادلة 46.8.

إن استخدام المعادلتين 63.8 و 65.8 المستنبطتين من مبدأ دالمبير يسهل عملية حل المسائل لإنهما لا تحتويان أيةَ قوىً داخلية. إذ إن محصلة القوى الداخلية ومحصلة عزومها حول مركز أطر الإسناد القصورية يساوي الصفر. أما المعادلتان 66.8 و 67.8 فهما مناسبتان لدراسة الجسم الجاسئ أو نظام الأجسام الجاسئة، ولا تعتبر المعادلتان نفسهما كافيتين لدراسة حركة النظام المتغير زمنياً دراسةً وافية. إن استخدام مبدأ دالمبير يساعد على حل الكثير من مسائل النظام المقيد، كإيجاد ردود أفعال القيود الخارجية، وذلك من مساقط المعادلتين 63.8 و 65.8. أما إيجاد ردود الأفعال الداخلية ، فيتطلب الأمر فصل كل الجسيمات ودراسة كل جسيم على حدة.

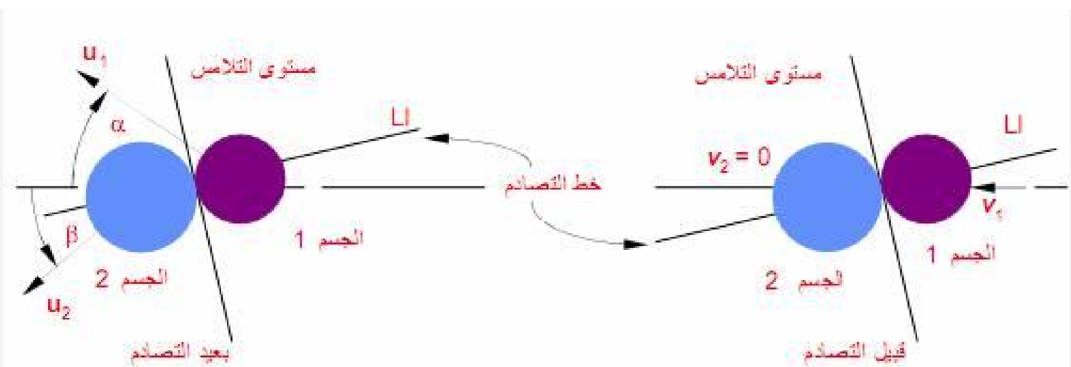
أسـئلـةٌ مـحـلـولـة

البـــــــــــاب
التاســــــــع

التصادم IMPACT

يعتبر ارتطام جسمين بعضهما ببعض بحيث يؤثر كل جسمٍ على الآخر بقوةٍ كبيرةٍ ويحدث ذلك في زمنٍ صغيرٍ جداً مثالاً على التصادم بين جسمين. وفي الحقيقة، تتبدى تصادماتٍ ثنائيةٍ في العديد من حقول الطبيعة بدءً بكرات البيلياردو وانتهاءً بالجسيمات الأولية. وما يهمنا هنا هو دراسة التأثير الميكانيكي للصدمة على الجسم (النظام) المتحرك، أي معرفة حركته قبل وبعد تصادمه مع جسمٍ آخر.

اعتبر جسمين أملسين، كتلتاهما m_1 وm_2، **شكل** 1.9. يتحرك الأول بالسرجهة $\boldsymbol{v}_1$ باتجاه الثاني، الذي يكون في حالة سكون، $\boldsymbol{v}_2 = 0$. فيتشتت الجسم 1، بعيد التصادم، بسرجهةٍ $\mathbf{u}_1$ تصنع الزاويةَ α مع الاتجاه الابتدائي للحركة؛ بينما يرتدُّ الجسم 2 بسرجهةٍ $\mathbf{u}_2$ تصنع الزاويةَ β مع الاتجاه نفسه للحركة. وتبعاً لذلك فإن حركة كلٍّ من الجسمين 1 و 2 وسر جهتيهما بالتحديد تتغيران تغيراً متصلاً ودونما انقطاع، وذلك تحت تأثير قوةٍ لحظيةٍ تدعى الدفع الصادم Impulse of an Impact خلال فترةٍ زمنيةٍ قصيرةٍ جداً.



شـــكل 1.9

من هنا يتبدى لنا التصادمُ كظاهرةٍ فيزيائيةٍ تحدث نتيجة ارتطامِ جسمين أو أكثر بعضهما مع بعض خلال فترةٍ زمنيةٍ قصيرةٍ جداً. وفي اللحظة التي يحدث فيها التصادم تكون قواهُ عموديةً على مستوى التلامس المار في أولِ نقطةٍ تلامس بين الجسمين المتصادمين. ويسمى الخط العمودي على مستوى التلامس بين الجسمين المتصادمين بخط التصادم، ويرمز له بالرمز LI. كما تدعى الفترة الزمنية التي يستغرقها التصادم بفترة التصادم. وبالعادة يدعى التصادم بين جسمين مركزا كتلتيهما على خط التصادم بالتصادم المركزي Central Impact، وعلى النقيض من ذلك، يدعى التصادم اللامتراكز Eccentric Impact بالتصادم الذي يحدث بين جسمين مركزا كتلتيهما لا يقعان على خط تصادمهما. ومن المهم دراسة التصادم المركزي عندما تتسامت سرجهتا الجسمين المتصادمين مع خط تصادمهما، والذي يدعى التصادم المركزي المباشر Direct Central Impact، أو لا تتسامت سرجهتا الجسمين المتصادمين مع خط التصادم، ليدعى عندئذٍ بالتصادم المركزي المائل Oblique Central Impact.

1.9 المعادلة الأساسية لحركة الجسم عند التصادم

يؤثر على الأجسام المتصادمة قوىً تتغير بمعدلاتٍ كبيرةٍ جداً ، تتراوح قيمُها من الصفر وحتى قيمةٍ عظمى ثمَّ تؤول للصفر. لذلك؛ من الأفضل قياس مقدار التأثير الميكانيكي المتبادل بين الأجسام المتصادمة بواسطة دفع القوة - الدفع الصادم Impulse of an Impact وليس القوة نفسها. ويعرَّف دفع القوة رياضياً بالتكامل المحدود، انظر معادلة 2.5

$$\mathbf{P}_{imp} = \int_0^{\tau} \mathbf{F}_{imp}\, dt \qquad 1.9$$

وهو بالتالي كميةٌ محددةٌ، وإن كانت الفترة الزمنية τ صغيرةً جداً $\tau << 1\,[s]$. اعتبر جسماً ، كتلته m، ويتحرك بالسرجهة $\boldsymbol{v}$ التي تغيرت بعيد التصادم مع جسمٍ آخر إلى **u**. نكتب قانون تَغَيُّرَ زخم الجسم، معادلة 6.5

$$m\,(\mathbf{u} - \boldsymbol{v}) = \mathbf{P}_{imp} = \int_0^{\tau} \mathbf{F}_{imp}\, dt \qquad 2.9$$

أي أن التغير في زخم الجسم عند تصادمه مع جسم آخر خلال فترة الصدمة يساوي الدفع الصادم المؤثر على ذلك الجسم. وتعتبر المعادلة 2.9 المعادلة الأساسية لحركة الجسم عند التصادم، إذ تلعب الدور نفسه الذي يلعبه قانون نيوتن الثاني في الديناميكا.

ويمكن تعريف هذه المعادلة الاتجاهية 2.9 بثلاث معادلات قياسية عند إسقاطها على المحاور الديكارتية المتعامدة، أو أية مجموعة محاور متعامدة أخرى. كما يمكن إيجاد سرجهة الجسم بعيد تصادمه مباشرة من المعادلة نفسها

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{v} + \mathbf{P}_{imp} / m \qquad 3.9$$

والتي تساوي سرجهة الجسم قبيل التصادم، مضافاً إليها وَحْدَةُ دفع القوة بدلالة الكتلة. وعلى الغرار نفسه، إذا عرفنا موضع الجسم قبيل التصادم بالمتجه **r**، وبعيد التصادم بالمتجه **r'**، فإن سرجهتيه قبيل التصادم وبعيده تعرفان كمشتقتي متَّجِهي الموضع. أو رياضياً

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \ , \ \boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

وباستبدال قيمهما في المعادلة 3.9 ينتج أن

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\mathbf{P}_{imp}}{m}$$

وبإجراء التكامل على طرفي المعادلة الأخيرة مرتين، وحل الناتج بدلالة الإزاحة في متَّجِه الموضع

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \int_0^{\tau} \frac{\mathbf{P}_{imp}}{m} dt \cong 0 \qquad 4.9$$

والتي تعني أن إزاحة الجسم نتيجةً للتصادم عن موضعه قبيل التصادم تكاد تكون معدومة، وذلك لصغر الفترة الزمنية τ. وعلى هذا الأساس يمكن استخلاص النتائج التالية خلال فترة التصادم:

1- يمكن إهمال تأثير القوى غير الدفعية، كقوة الجاذبية مثلاً.

2- يمكن إهمال إزاحات الأجسام المتصادمة واعتبار الأجسام ثابتةً في مواضعها، معادلة 4.9.

3- التغير في سرجهة الجسم محدد، معادلة 2.9.

2.9 قوانين الزَّخَم عند التصادم

1.2.9 قانون تَغَيُّر زَخَم الجسيم والنظام

تحتفظ المعادلة 15.8 الناتجة في البند 1.5.8 بشكلها الأصلي أيضاً. ولأننا نهمل تأثير القوى غير الدفعية عند التصادم يتبقى في الجهة اليمنى للمعادلة المذكورة أعلاه (تأثير) القوى الدفعية فقط. وباستبدال $\mathbf{K}_o = m\,\boldsymbol{v}$ و $\mathbf{K} = m\,\mathbf{u}$ ليتناسب مع الحالة الجديدة ، قبيل التصادم وبعيده على التوالي، فإن المعادلة 15.8 تؤول للشكل التالي

$$m\,(\mathbf{u} - \boldsymbol{v}) = \mathbf{P} \qquad 5.9$$

وهذا قانون تغير الزخم للجسيم الصادم: **التغير في زخم الجسيم الصادم يساوي الدفع الرئيسي للقوى الصادمة المؤثرة عليه.**

وبشكلٍ عام، إذا كان النظام مكوناً من جسيماتٍ عددها n، فإن قانون حركة الجسيم الاعتباطي i من جسيمات النظام تكافئ المعادلة 5.9 مضافاً إليها الرمز i

$$m_i\,(\mathbf{u}_i - \boldsymbol{v}_i) = \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_e \qquad 6.9$$

حيث أن $\mathbf{P}_i$ الدفع الرئيسي للقوى الداخلية المؤثرة على الجسيم المعين i، بينما $\mathbf{P}_e$ الدفع الرئيسي للقوى الخارجية المؤثرة على الجسيم نفسه. وإذا افترضنا أن كلّ جسيمات النظام تتصادم في اللحظة نفسها، يمكن كتابة المعادلة 6.9 لكل جسيمات النظام 1 ، 2 ... و n. وبجمع كلّ المعادلات الناتجة حداً حداً نحصل على المعادلة

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\mathbf{u}_i - \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i\,i} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i\,e}$$

أو

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\mathbf{u}_i - \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i\,e} \qquad 7.9$$

إذ يساوي الدفع الرئيسي للقوى الداخلية المؤثرة على النظام صفراً ، $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i\,i} = 0$. هذه المعادلة 7.9 تعرف قانون تغير زخم النظام عند التصادم: **التَّغَيُّرُ في زَخَمِ النِّظَام خلال فترة التَّصادُمِ يُساوي الدَّفْع الرَّئِيسيّ للقوى الخارجية المؤثرة على النظام.**

وإذا كان النظام جسماً جاسئاً، كتلته M، تتحول المعادلة 7.9 وقياساً على المعادلة 5.8 إلى الشكل الأكثر اقتضاباً

$$M\,(\mathbf{u}_c - \boldsymbol{v}_c) = \mathbf{P}_{i\,e} \qquad 8.9$$

حيث أن $\boldsymbol{v}_c$ و $\mathbf{u}_c$ سرجهتي مركز كتلة الجسم الجاسئ قبيل التصادم وبعيده على التوالي.

2.2.9 قانون حفظ زخم الجسيم والنظام

يتحرك الجسيم بنفس السرجهة إذا كان الدفع الرئيسي للقوى الصادمة المؤثرة على الجسيم مساوياً للصفر. ورياضياً (انظر معادلة 7.5) فإن

$$\mathbf{P} = 0 \rightarrow \quad m\,(\mathbf{u} - \boldsymbol{v}) = 0$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{v} \qquad 9.9$$

وإذا كان الدفع الرئيسي للقوى الصادمة الخارجية المؤثرة على النظام مساوياً للصفر $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i\,e} = 0$ ، معادلة 7.9، فإن هذا النظام يخضع للمعادلة التالية

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\mathbf{u}_i - \boldsymbol{v}_i) = 0 \qquad 10.9$$

أو

$$m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 + \,\ldots\ldots\ldots + m_n\mathbf{u}_n = m\,\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2\,\ldots\ldots\, m_n\,\boldsymbol{v}_n \qquad 1.10.9$$

وعلى نفس المنوال، إذا كان الدفع الرئيسي للقوى الصادمة الخارجية المؤثرة على الجسم الجاسئ مساوياً للصفر $\mathbf{P}_{ie}=0$، معادلة 8.9 ، يتحرك الجسم الجاسئ بنفس السرعة قبيل وبعيد التصادم

$$M\,(\mathbf{u}_c - \boldsymbol{v}_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_c = \boldsymbol{v}_c \qquad 11.9$$

إن الملاحظة الأولية للمعادلات 9.9 - 11.9 تبين أن الدفوع الصادمة الداخلية لا يمكنها التسبب بتغير زخم النظام أو الجسم الجاسئ.

3.9 قوانين الزَّخَم الزَّاوِيّ عند التصادم

1.3.9 قانون تَغَيُّرِ الزَّخَم الزَّاوِيّ للأنظمة والجسم الجاسئ

لنعتبر النظام مكوناً من فئة جسيماتٍ عددها n. ندرس حركة جسيمٍ اعتباطي من جسيماته i، كتلته m_i وسرجهته قبيل التصادم وبعيده $\boldsymbol{v}_i$ و $\mathbf{u}_i$ على التوالي، حيث i=1,2,3,....n. يُؤثر على الجسيم i الدفع الصادم

الداخلي $\mathbf{P}_i$، والدفع الصادم الخارجي $\mathbf{P}_e$. إذا حددنا موضع الجسيم i بالنسبة لمركز الإحداثيات الثابت O بالمتَّجه $\mathbf{r}_i$، فإنه طبقاً للنتيجة الثانية الواردة أعلاه، لا يتغير تموضع الجسيم المذكور عند تصادمه مع جسيمٍ آخر لحظتئذٍ، كما لا تتغير متجهات مواضع جسيمات النظام. وإذا ما ضربنا طرفي المعادلة 6.9 بالمتجه $\mathbf{r}_i$ من اليسار نحصل على

$$\mathbf{r}_i \times m_i\, \mathbf{u}_i - \mathbf{r}_i \times m_i\, \boldsymbol{v}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i + \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_e$$

وبكتابة هذه المعادلة لكل جسيمات النظام ثم جمعها حداً حداً

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i\, \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i\, \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_e$$

أو

$$\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_v = \mathbf{M}_{pe} \qquad 12.9$$

حيث إن $\mathbf{L}_u$ مُتَّجِه الزَّخَمُ الزَّاوِّيّ الرَّئِيسيّ بعيد التصادم، بينما $\mathbf{L}_v$ مُتَّجِه الزَّخَمُ الزَّاوِّيّ الرَّئِيسيّ قبيل التصادم، أما $\mathbf{M}_{pe}$ فهو العزم الرئيسي لدفوع القوى الصادمة الخارجية المؤثرة على النظام حول نفس المركز الثابت O. بينما العزم الرئيسي لدفوع القوى الصادمة الداخلية المؤثرة على النظام حول نفس المركز فيساوي الصفر، وذلك وفقاً لخواص القوى الداخلية $\mathbf{M}_{pi}=0$. وتمثل المعادلة 12.9 قانون تغير الزَّخَمُ الزَّاوِيّ للنظام: **التَّغَيُّر في الزَّخَمِ الزَّاوِيّ للنظام خلال فترة التصادم يساوي العزم الرئيسي لدفوع القوى الصادمة الخارجية المؤثرة على النظام.** ومن الطبيعي أن يتمّ إسناد كلٍ من $\mathbf{L}$ و $\mathbf{M}_{pe}$ إلى نفس نقطة الإسناد نفسها.

2.3.9 قانون حفظ الزَّخَم الزَّاوِيّ للأنظمة والجسم الجاسئ

إذا كان العزم الرئيسي لدفوع القوى الصادمة الخارجية المؤثرة على النظام المعين صفراً، يبقى الزَّخَمُ الزَّاوِيّ للنظام ثابتاً مقداراً واتجاهاً. أي أن

$$\mathbf{M}_{pe} = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{L}_u = \mathbf{L}_v \qquad 13.9$$

وتمثِّل هذه المعادلة 13.9 قانون حفظ الزَّخَمُ الزَّاوِيّ للنظام خلال فترة التصادم.

4.9 التصادم المركزي المباشر Direct Central Impact

اعتبر حركة كرةٍ، كتلتها m، وتسقط عمودياً على سطحٍ أفقيٍ أملس وثابت بالسرجهة $\boldsymbol{v}$ لحظة ارتطامها بالسطح. يؤثر على الكرة لحظة الارتطام الدفع الصادم العمودي من السطح للأعلى، **شكل** 2.9. إذا كانت سرجهة ارتداد الكرة من السطح الأفقي للأعلى بعيد التصادم **u**، فإن معادلة حركة الكرة تكافئ المعادلة 2.9 للجسم الصادم، وذلك تحت تاثير الدفع الصادم $\mathbf{P}_{imp}$ كدفعٍ خارجيٍ وحيد

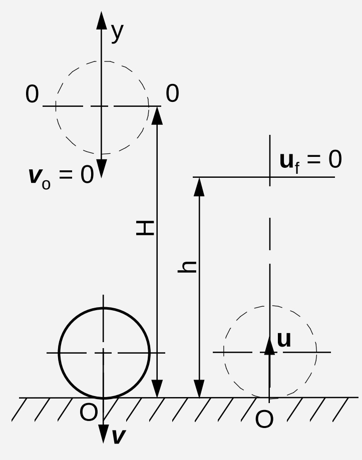
$$m(\mathbf{u} - \boldsymbol{v}) = \mathbf{P}_{imp} \qquad 14.9$$

أو بعد إسقاطها على المحور العمودي Oy يكون

$$m(u + v) = P_{imp} \qquad 1.14.9$$

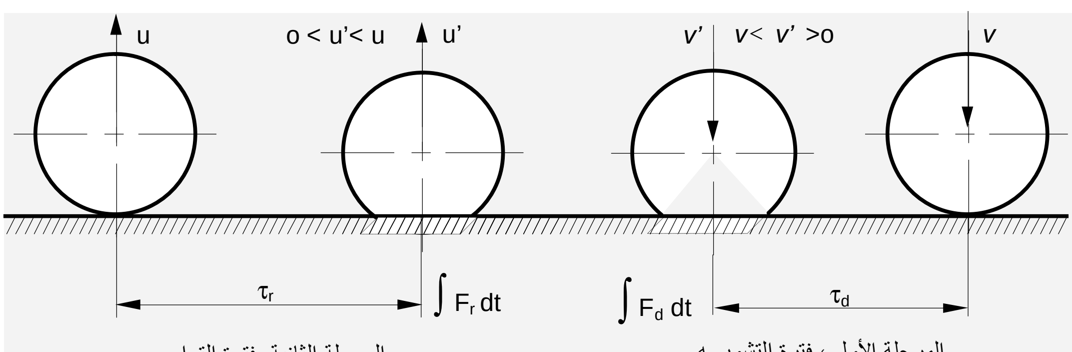
هذه المعادلة 1.14.9 تحوي المجهولين: سرعة الجسم بعيد التصادم u، والدفع الصادم الخارجي P_{imp}. لذا؛ يجب البحث عن معادلة أخرى تربط بين المجهولين المذكورين أو تحدد قيمة أحدهما.

إن سرعة الارتداد (سرعة الجسم بعيد التصادم) u، تعتمد بالإضافة إلى سرعة الارتطام على نوعية المواد المصنوعةِ منها الأجسام المتصادمة. وهذا ما اثبتته التجارب العملية التي بينت أن الأجسام أثناء تصادمها مع الأسطح أو بعضها مع بعض، يجب أن لا تتشوه بشكلٍ مفرط ولا تتفتت نتيجة التصادم. أي أن هذه الفرضية لا تكون صحيحةً عند وجود قوىً كبيرة جداً ومفرطةٍ عند التصادم.



شـــكل 2.9

ويمكن تحديد تصادم الجسم الساقط على السطح الأفقي الثابت بمرحلتين، **شكل** 3.9 : الأولى تتناقص فيها سرعة الجسم الساقط من v حتى الصفر، وتتحول طاقته الحركية إلى طاقة وضعٍ تؤدي إلى تشوه جزءٍ من الجسم وتسخينهِ، وبالتالي تتعرض أجزاؤه الفاعلة للتشوه والانضغاط لتأثرها بالقوة الدفعية الهائلة $\mathbf{F_d}$ خلال فترة التشويه Deformation Period. أما المرحلة الثانية للتصادم فيبدأ الجسم فيها بالعودةٍ تدريجياً إلى شكله الأولي، كما تتحول طاقة وضعه الداخلية إلى طاقة حركيةٍ تدفع الجسم للانطلاق من جديد. فيتلاشى التشوه ويختفي نتيجة تأثره بالقوة الدفعية الهائلة $\mathbf{F_r}$ خلال فترة التراجع Restitution Period. وحيث أن الجسم لا يستعيدُ تماماً كل طاقته الحركية الأولية لفقدان جزءٍ منها في التسخين وآخر في تشويهِ الجسيم فإن سرعةَ الجسم بعيد التصادم u تكون أقل بالضرورةِ من سرعةِ الارتطام، أي سرعته قبل التصادم.



شـــكل 3.9

وبشكلٍ عام تؤثر القوة F_d على الجسم الصادم لحظة بداية الصدمة وحتى انتهاء فترة التشوه، بينما توثر القوة F_r على الجسم الصادم لحظة انتهاء فترة التشوه وحتى انتهاء الصدمة. وبالعادة يكون الدفع الارتدادي Restitution Impulse أقل من الدفع التشويهي Deformation Impulse، أي أن $\int_0^{\tau_d} F_d\,dt \rangle \int_0^{\tau_r} F_r\,dt$. كما تُعَرِّف النسبة بين هذين الدفعين معامل الارتداد Coefficient of Restitution

$$e = \frac{\int_0^{\tau_r} F_r \, dt}{\int_0^{\tau_d} F_d \, dt} \qquad 15.9$$

وبكتابة المعادلة 2.9 وللمرحلتين الأولى والثانية يكون

$$m(v' - v) = -\int_0^{\tau_d} F_d \, dt$$

$$m\ (u - u') = +\int_0^{\tau_r} F_r \, dt$$

ولأن كلاً من السرعتين v' و u' صفر ، تؤول المعادلتان السابقتان للشكل التالي

$$m\,v\ = \int_0^{\tau_d} F_d \, dt$$

$$m\ u\ = \int_0^{\tau_r} F_r \, dt$$

وبتعويض ذلك في المعادلة 15.9 نكتب معامل الارتداد

$$e\ = \frac{u}{v} \qquad 16.9$$

الذي يساوي النسبة بين قيمتي سرعة الجسم بعيد التصادم إلى سرعته قبيل التصادم. هذه المعادلة 16.9 تزودنا بطريقة مثلى لقياس معامل الارتداد للمواد المختلفة. فلقياسه بين حديد الزهر والفولاذ مثلا، نسقط كرةً من حديد الزهر من ارتفاعٍ ما، وليكن H، على ســطحٍ أملس من الفولاذ، أو بالعكس (الكرة من الفولاذ والســطح الأملس من حديد الزهر). ثمّ نقيس الارتفاع الأقصى الذي وصلته كرة الحديد بعد التصادم. وإذا افترضنا أن الارتفاع الجديد h، فإنه وَفْقَاً لقوانين الديناميكا الأساسية يكون معامل الارتداد

$$e\ = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h}{H}} \qquad 17.9$$

لذلك، تتراوح قيمة معامل الإرتداد e بين الصفر والوَحْدَة، ويعتمد على المواد التي تُصنع منها الأجسام المتصادمة وأشكالها وأحجامها وعلى سرعة الصدمة. وعلى ذلك ندرس المثلين التاليين

1 - التصادم اللدن التام [1] Perfectly Plastic Impact، مطلق اللّيونة

يتميز هذا التصادم بأن طاقته الحركية تتحول إلى أشكالٍ أخرى من الطاقة كتشويهه وتسخينه ومعامل ارتداده يتلاشى e = 0. فضرب كرةٍ من المعجون بأية سرعةٍ إلى سطحٍ ما يؤدي إلى تفلطح الكرة على السطح والتصاقها به دونما قدرة على الارتداد للجهة الأخرى.

[1] يدعى أيضاً بالتصادم اللامرن التام Completely Inelastic Impact.

2- **التصادم المرن التام Perfectly Elastic Impact، مطلقُ المرونة**

يتميز هذا التصادم بأن طاقته الحركية تبقى محفوظة ومعامل ارتداده يساوي الوحدة $e = 1$. وهذا يعني أن ارتطاماً مرناً لجسمٍ بآخر ثابتٍ بسرعةٍ معينة يجعل الأول يرتد للخلف بنفس السرعة. وعليه نورد الجدول التالي[2] الذي يمثل قيم معامل الارتداد لمواد مختلفة عند التصادم المركزي المباشر.

موادالأجسام المتصادمة	معامل الإرتداد
زجاج بزجاج	0.95 - 0.93
عاج بعاج	0.89 - 0.88
فولاذ بفولاذ	0.7 - 0.5
فلّين بفلّين	0.6 - 0.5
حديد زهر بحديد زهر	0.7 - 0.4
خشب بخشب	0.6 - 0.4
رصاص برصاص	0.18 - 0.12
حديد برصاص	0.15 - 0.11
طين (طَفَل) بطين	0.0
معجون بمعجون	0.0

معامل الارتداد التجريبي لبعض المواد

ولحالة التصادم بين جسمين ، ندرس حركتيهما كما في **الشكل** 4.9. كتلتاهُما m_1 و m_2، وسرعتهاهما قبيل الصدمة $\boldsymbol{v}_1$ و $\boldsymbol{v}_2$ وبعيد الصدمة $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$. لحل هذه المسألة نطبق قانون حفظ زخم النظام المكون من الجسمين المتصادمين، والمعادلة 10.9 بالتحديد. فكلٌ من الدفع الداخلي والقوى الخارجية المؤثرة على هذا النظام تساوي الصفر. أو رياضياً

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_1 \mathbf{u}_2 = \text{const.}$$

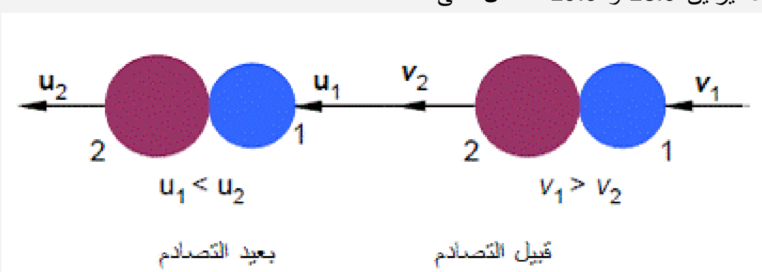
حيث يتمثل زخم النظام قبيل التصادم بالطرف الأيسر وزخم النظام بعيد التصادم بالطرف الأيمن. وبإسقاط هذه المعادلة على الخطِّ الواصل بين مركزي كتل الجسمين يكون

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 = \text{const.} \qquad 18.9$$

وكما هو ملاحظٌ، تحوي المعادلة الأخيرة المجهولين u_1 و u_2. ولهذا؛ يجب البحث عن معادلةٍ إضافيةٍ أخرى تربط بين هذين المجهولين. وهذه المعادلة تكون بالعادة معامل الارتداد، الذي يساوي نسبة فرقي السرعتين بعيد التصادم وقبيله. أو رياضياً

$$e = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \qquad 19.9$$

وبحل المعادلتين الأخيرتين 18.9 و 19.9 نحصل على



شـــكل 4.9

[2] انظر المرجع 2 من قائمة المراجع الأجنبية، ص647.

$$u_1 = v_1 - (1+e)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2) \quad 20.9$$

$$u_2 = v_2 + (1+e)\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1 - v_2) \quad 21.9$$

أما الدفع الصادم فيمكن إيجاد قيمته من قانون تغير زخم الجسم الأول

$$P_{1imp} = m_1 (u_1 - v_1) \quad 22.9$$

بينما يكون دفع الجسم الثاني الصادم مساوياً للأول مقداراً ومضاداً له في الاتجاه

$$P_{2imp} = - P_{1imp} = m_1 (v_1 - u_1)$$

وباستبدال u_1 من المعادلة 20.8 وتعويضها في المعادلة الأخيرة

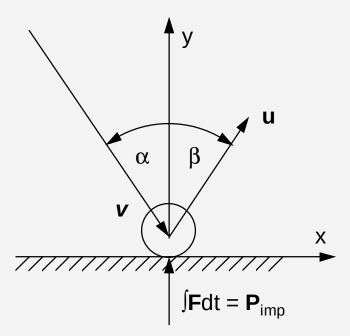
$$P_{1imp} = - P_{2imp} = (1+e)\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) \quad 23.9$$

5.9 **التصادم المائل** Oblique Impact

في هذه الحالة، تصنع سرجهة الجسم الصادم ***v*** الزاوية α وتصنع سرجهة الإرتداد **u** الزاوية β مع الرأسي، **شكل** 5.9. وبإسقاط المعادلة 5.9 على المحورين المتعامدين x و y

$$u \cos\beta = - v \cos\alpha + P_{imp} / m \quad 1.24.9$$

$$u \sin\beta = v \sin\alpha \quad 2.24.9$$



شكل 5.9

أي أن المركبتين المماستين (الأفقيتين) للسرجهتين *v* و u متساويتان، والتصادم لا يحدث إلا في اتجاه العمود على السطح لإهمال تأثير الاحتكاك. لذلك يتحدد معامل الارتداد بالعلاقة

$$e = \frac{u \cos\beta}{v \cos\alpha} \quad 25.9$$

وبحساب النسبة بين السرعتين بعيد التصادم وقبيله

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad 26.9$$

واستبدال ذلك في المعادلة 25.9 يكون

$$e = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \quad 27.9$$

وهكذا، فإن معامل الارتداد يساوي نسبة ظل زاوية السقوط Angle of Approach إلى ظل زاوية الارتداد Angle of Rebound. ولأن قيمة معامل الارتداد موجبة وأقل من واحد، $e \leq 1$، فإن تكون α بالضرورة أصغر من β؛ أي أن زاوية السقوط أقل من زاوية الارتداد. وعلى هذا الأساس، يمكن حساب مقدار الدفع الصادم P من المعادلة 1.24.9

$$P_{imp} = m(u \cos\beta + v \cos\alpha) \quad 28.9$$

أو بدلالة معامل الارتداد e

$$P_{imp} = m\, v \cos\alpha \{ 1 + e \} \quad 29.9$$

طاقة الحركة المفقودة The Kinetic Energy Loss

عند التصادم اللدن، نظرية كارنو [3] Carnot's Theorem

عرفنا من التصادم المركزي المباشر، **شكل** 2.9، أن الجسم المرتد للأعلى لن يصل للارتفاع الذي سقط منه لاستنفاد جزءٍ من طاقته الحركية على تشوهه وتسخينه و غيره. ولحساب مقدار الطاقة المفقودة نبدأ بمثالٍ التصادم المركزي المباشر للجسم الساقط من الارتفاع H. طاقة حركة الجسم قبيل الصدمة

$$T_v = 0.5\, m\, v^2$$

بينما طاقة حركته بعيد الصدمة

$$T_u = 0.5\, m\, u^2$$

ولذلك فالطاقة الحركية المفقودة

$$\Delta T = T_v - T_u$$

$$\Delta T = 0.5\, m\, [v^2 - u^2] = 0.5\, m\, [(v - u)(v + u)] \qquad 30.9$$

إذا عرفنا السرجهة المفقودة للجسم الساقط

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{v} - \mathbf{u} \qquad 31.9$$

فإن إسقاط هذه المعادلة على سالب المحور Oy، يعطي السرعة المفقودة

$$v = v + u \qquad 32.9$$

ولذلك يمكن كتابة الطاقة الحركية المفقودة، معادلة 30.9 بالصيغة الجديدة

$$\Delta T = \frac{m}{2}(v + u)^2\left\{\frac{v - u}{v + u}\right\}$$

$$\Delta T = \frac{m}{2}(v + u)^2\left\{\frac{1 - e}{1 + e}\right\} \qquad 33.9$$

نحسب الطاقة الحركية المفقودة لحالة التصادم بين جسمين، حركتهما انتقاليةٌ بحيث تكون سرجهتاهما قبيل التصادم $\boldsymbol{v}_1$ و $\boldsymbol{v}_2$ وبعيد التصادم $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ على التوالي، انظر **الشكل** 4.9. طاقة حركة النظام (الجسمين) قبيل التصادم

$$T_v = \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2$$

بينما طاقة حركته بعيد التصادم

$$T_u = \frac{m_1}{2}u_1^2 + \frac{m_2}{2}u_2^2$$

وعلى هذا الأساس، فالطاقة المفقودة تحسب كالفرق بين الطاقتين

[3] **لازار كارنو** L. Carnot's، 1753- 1823 عالمٌ فرنسي، برز في الرياضيات والميكانيكا بالإضافة إلى نشاطاته السياسية أيام الثورة الفرنسية.

$$\Delta T = T_v - T_u = \frac{m_1}{2}\left[v_1^2 - u_1^2\right] + \frac{m_2}{2}\left[v_2^2 - u_2^2\right] \qquad 34.9$$

وإذا ما عرفنا السرجهتين المفقودتين $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$، قياساً على المعادلة 31.9 وللجسمين المتصادمين 1 و 2 يكون

$$\mathbf{V}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \mathbf{u}_1 , \mathbf{V}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \mathbf{u}_2 \qquad 35.9$$

ومسقطاهما على خطِّ التصادم

$$V_1 = v_1 - u_1 , V_2 = v_2 - u_2 \qquad 36.9$$

فإنه قياساً على المعادلة 33.9 تكون الطاقة الحركية المفقودة للنظام المكون من الجسمين المتصادمين 1 و 2

$$\Delta T = \left\{\frac{m_1}{2}\left(v_1 - u_1\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(v_2 - u_2\right)^2\right\}\frac{1-e}{1+e} \qquad 37.9$$

وبالإستناد إلى المعادلتين 33.9 و 37.9 صاغ **كارنو** نظريته: **طاقة الحركة التي يفقدها الجسم، النظام المتصادم عند تصادمه المركزي المباشر تساوي** $\frac{1-e}{1+e}$ **من طاقة حركته فيما لو تحرك بسرعته المفقودة.** لاحظ أن المعادلتين 33.9 و 37.9 تعنيان أن طاقة حركة الجسم أو النظام تبقى ثابتة عند التصادم المرن التام $T = const$ لأن $e = 1$ و $\Delta T = 0$، بينما تساوي طاقة حركة الجسم أو النظام الطاقةَ الحركية المفقودة $T = \Delta T$ عند التصادم اللدن التام $e = 0$.

وسنحلل الحالتين الجديرتين بالاهتمام

1- كتلة الجسم الصادم تفوق كثيراً كتلة الجسم المصدوم $m_2/m_1 \cong 0$، نعتبر هنا أن $m_1 = m_1 + m_2$. طاقة الحركة المفقودة

$$\Delta T \cong 0 \quad \rightarrow \quad T_u = T_v$$

وعليه، فبالرغم من أن التصادم لدُن، إلا أنه لا يحدث فقدانٌ للطاقة الحركية عند التصادم. ويبدأ النظام الحركة بعيد التصادم بنفس طاقة الحركة تقريباً التي كانت له قبيل التصادم. ويتبدى هذا التصادم في الحياة العملية عند دق المسامير والأسافين في الجدران، إذ يجب أن تكون كتلة المطرقة أكبر بكثير من كتلة المسمار.

2 - كتلة الجسم المصدوم تفوق كثيراً كتلة الجسم الصادم $m_1/m_2 \cong 0$. فنعتبر في هذه الحالة أن $m_2 = m_1 + m_2$ وعليه فطاقة الحركة المفقودة

$$\Delta T \cong T_v \quad \rightarrow \quad T_u = T_v$$

أي أن الطاقة الحركية للنظام تستنفد لتشوه الجسم المصدوم. ويمكن اعتبار الجسمين المتصادمين ثابتين بعيد الصدمة. ولهذه الظاهرة أهميةٌ كبيرةٌ في الحياة العملية، فعند طرق الحديد يجب أن تكون كتلة السندان والنموذج أكبر بكثير من كتلة المطرقة

لندرس حالةٌ خاصةٌ جداً للتصادم اللدن التام $e = 0$، بين جسمين الأول كان متحركاً بسرعةٍ v_1 نحو الثاني الذي كان ساكناً. نحسب الطاقة الحركية لهذا النظام قبيل التصادم وبعيده

$$T_v = \frac{m_1}{2} v_1^2 \qquad 38.9$$

$$T_u = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \qquad 39.9$$

ومن معامل الارتداد $e = 0$ ينتج أن

$$u_1 = u_2 \qquad 40.9$$

كما أن قانون حفظ الزخم للجسمين المتصادمين

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad 41.9$$

وباستبدال $u_2 = u_1$ وحل الناتج بدلالة u_1 يكون

$$u_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \qquad 42.9$$

وتبعاً لذلك تؤول الطاقة الحركة للنظام بعيد التصادم

$$T_u = \frac{m_1 + m_2}{2} u_1^2$$

وباستبدال u_1 من المعادلة 42.9 ينتج أن

$$T_u = \frac{m_1 + m_2}{2} \left\{ \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right\}^2$$

$$T_u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{m_1}{2} v_1^2 \qquad 43.9$$

كما أن استبدال $T_v = \frac{m_1}{2} v_1^2$ ، من المعادلة 38.9 ينتج أن

$$T_u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_v \qquad 44.9$$

أو بدلالة الطاقة الحركية المفقودة

$$\Delta T = T_v - T_u$$

$$\Delta T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_v \qquad 45.9$$

أسـئـلـةٌ مـحـلـولـة

الباب

العاشـــــر

عناصر الميكانيكا التحليلية ومعادلات لاجرانج

ELEMENTS OF ANALYTICAL MECHANICS & LAGRANGES EQUATIONS

1.10 القيود وأنواعها

لقد تم في الباب الرابع من هذا الكتاب إيضاح المبادئ الأساسية لقيد الجسيم المادي. وقد عُرِّف القيد بأنه التأثير الخارجي الملموس على الجسيم المتحرك الذي يجعله يرتبط مع جسمٍ أو أجسامٍ أخرى ارتباطاً وثيقاً. وتبعاً لذلك يتحرك الجسيم حركةً غير حرةٍ بل ومقيدة. وسيتم تعميم هذا التعريف على القيود التي تؤثر على أنظمة الجسيمات المادية - قيود الأنظمة.

اعتبر نظاماً ميكانيكياً ممثلاً بجســيماتٍ عددها n، وقد فرضت على أوضاع وسرجهات جسيماته شروطٌ وتحديداتٌ معينةٌ ذات طابعٍ هندسي أو كينماتيكي، والتي ندعوها قيود. معادلات قيود النظام

$$f_{\nu}(t, \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) = 0, i = 1,2,3, ...n \qquad 1.10$$

حيث ν ، $\nu = 1, 2,...N$ رقم القيد المعين، و N عدد القيود المفروضة على النظام. لذلك، فإن النظام الذي معادلة أحد قيوده 1.10 محددٌ زمنياً بالرمز t وتموضعاً بالمتَّجه $\mathbf{r}_i$ وسرجهة بالمتجه $\dot{\mathbf{r}}_i$. كما يفرض القيد الريونوميّ، معادلته $f(t, \mathbf{r}_i)$، شروطاً على تموضع أجزاء النظام في الفراغ في اللحظة الزمنية t. وفي حالة وجود قيدٍ تفاضليّ، معادلته $f(t, \dot{\mathbf{r}}_i)$، فإن أجزاء النظام يمكنها أن تَشْغَلَ أيِّ وضعٍ في الفراغ في أية لحظةٍ زمنية. ولكن في ذلك الوضع، لا يمكن أن تأخذ سرجهة الجسيم أية قيمةٍ مهما كانت، لأن القيد التفاضليّ يفرض شروطاً على السرجهات. واستناداً إلى ذلك نعتبر البندول البسيط قيداً هولونومياً، بينما زلاجة التزحلق على الجليد، قيداً غير هولونومي nonholonomic.

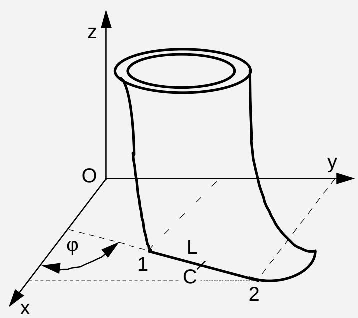
تتحدد حركة البندول البسيط بالإحداثي القطبي الوحيد φ، أو بالإحداثيين الديكارتيين y و z، **شكل** م 6.4.
ولأن طول الحبل أو القضيب OP ثابتٌ .r = R = const، يرتبط الإحداثيان المذكوران بعضهما مع بعض بالعلاقات الرياضية التالية:

$$z = R \sin\varphi \ , \ y = R\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad y^2 + z^2 = R^2$$

ولأن كل المتغيرات φ ، y و z الواردة في العلاقات السابقة ليست معرفةً كدوال لمشتقاتها المناظرة، يكون هذا القيد هولونومياً. أما زلاجة التزحلق على الجليد، **شكل** 1.10، فهي عبارةٌ عن قضيبٍ (سكينٌ) حادّ، تتحدد حركته بتموضع الخط الواصل بين طرفيه، الخط $\overline{12}$. ولهذا فسرجهة مركز كتلته تتسامت مع الخط $\overline{12}$. إذ إن

$$z_1 = z_2 = 0 \ \Lambda \ \dot{y} = \dot{x}\tan j$$

حيث φ الزاوية التي يصنها القضيب مع الأفقي. كما يتحكم في الحركة قيدٌ معادلته الرياضية



شكل 1.10

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = L^2$$

حيث L طول (سكين) الزلاجة. ولأن معادلات الحركة تحوي السرعات، كان القيد غير هولونومياً كما أن شرطاً رياضياً آخر يمكن إستنتاجه من معادلات حركة الزلاجة وهو أن هذه القيود غير قابلةٍ للتكامل.

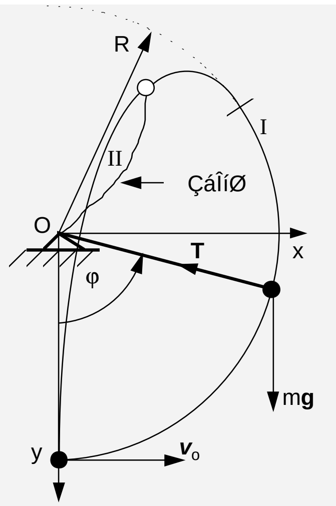
ومن الأهمية بمكان معرفة القيود ثُنَائِيَّة الجانب Bilateral Constraints والقيود أُحَادِيَّة الجانب Unilateral Constraints في الميكانيكا، والتي تتبع مدى تأثير القيد بشكلٍ مُتَّصِلٍ أو غير مُتَّصِلٍ. فالقيد الذي يؤثر على النظام المتحرك بشكلٍ متصل ويرتبط به ارتباطاً وثيقاً، يّلاصقه ولا ينفصل عنه، يدعى قيداً ثُنَائِيَّ الجانب. وعلى النقيض من ذلك ، يُدْعى القيد الذي يؤثر على النظام المتحرك بشكلٍ متقطع ولا يرتبط به ارتباطاً وثيقاً، ويَحدُّ من حركة النظام باتجاهٍ ما، سامحاً له في نفس الوقت بالحركة في الاتجاه الآخر بالقيد الأُحادِيِّ الجانب.

وتبعاً لذلك، يمكن تقسيم حركة الجسيم المقيدة بهذه القيود إلى جزأين، يكون القيد متوتراً (فعالاً) في أحد الأجزاء، وعديم التأثير (غير فعال) في الجزء الآخر. وبذلك ففي الأجزاء المختلفة على مسارِ جسيمٍ مقيَّد الحركة، إما أن يهمل القيد كلياً ليدعى قيداً أحاديّ الجانب، أو يبرز تأثيره على حركة الجسيم فيدعى قيداً ثنائيّ الجانب. ويتبين لنا من **الشكل** 2.10 أن مسارَ الكتلة المنطلقة (البندول البسيط) من الأسفل بسرجهةٍ ابتدائيةٍ وأفقيةٍ $\boldsymbol{v}_0$ القوسُ الدائري I، نصف قطره R عندما يكون الخيط مشدوداً، أي عندما يكون القيد فعالاً، بينما تؤول الكتلة المنطلقة إلى مقذوفةٍ، مسارها القطع المكافئ II لحظة تلاشي الشدُّ في الخيط. ومن الطبيعي أن يكون القيد ثنائيّ الجانب عند تحركه على المسار I، وأحاديّ الجانب عند تلاشي الشد في الخيط. عندئذٍ تكافئ حركة الكرة المتباينة

$$y^2 + x^2 \le R^2$$

ومن السهولة بمكان ملاحظة أن القيود ثنائية الجانب تعرف رياضياً بالمعادلات، بينما تعرف القيود أحادية الجانب بالمتباينات Inequalities.

2.10 درجات الحُرِّيَة Degrees of Freedom



شكل 2.10

يعتبر مفهوم درجات الحُرِّيَة من المفاهيم المهمة لدراسة حركة الجسيم والأنظمة الميكانيكية. وهو يكافئ عددياً أقل عددٍ ممكن من الإحداثيات المستقلة Independent Coordinates بعضها عن بعض التي تستخدم لتعريف أو وصف حركة الجسيم - النظام كاملاً.

لقد ثبت أن الإحداثي القطبي φ كان كافياً لتعريف حركة البندول الرياضي البسيط، بينما تحددت نفس الحركة في الإحداثيات الديكارتية بالإحداثيين y و z، مضافاً إليهما معادلة القيد. أي أن الإحداثي القطبي φ، أو أحد الإحداثيين الديكارتيين y أو z يكون كافياً لتحديد حركة البندول. وبالتالي فعدد درجات حريته واحدة ،S = 1، دونما أيّ اعتبار للنظام الإحداثي المستخدم لتعيين حركته.

وكمثالٍ آخر، تتحدد حركة جسيمٍ ما على سطح كرةٍ ثابتةٍ نصف قطرها R، بالإحداثيات الديكارتية الثلاثة x ، y و z مضافاً إليها معادلة القيد

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2$$

حيث إن (x_o, y_o, z_o) إحداثيات مركز الكرة. كما تتحدد نفس الحركة بالإحداثيين الكرويين φ و θ من مركز الكرة، ودونما أية قيود معرفة. ولذلك فعدد درجات حُرِّية هذا الجسيم عند حركته على سطح الكرة هو 2، S = 2. وهذا يساوي عدد الإحداثيات المستقلة، الإحداثيان الكرويان φ وθ الذي يساوي أيضاً الإحداثيات الديكارتية الثلاثة x ، y و z مطروحاً منها عدد القيود التي تربط هذه الإحداثيات مع بعض، أي قيدٌ واحد.

ومن السهولة الاستنتاج من المثلين الواردين أعلاه ، أنه يمكن تحديد عدد درجات حُرِّية النظام الميكانيكي (الجسيم) بعدد الإحداثيات المستقلة بعضها عن بعض للحركة، والذي يكافئ عدد الإحداثيات المُعَرِّفَة للحركة n مطروحاً منها عدد القيود N، دونما أيُّ اعتبارٍ لنظام الإحداثيات المستخدم الذي يعرف الحركة. ورياضياً فإن

$$S = n - N \qquad 2.10$$

3.10 الإحداثيات المعممة Generalized Coordinates

لقد ثبت لنا أنه يمكن تمثيل حركة الجسيم المفرد والأنظمة الميكانيكية بعدة طرقٍ. إذ لا يوجد نظامٌ إحداثي معين لتعريف حركة نظامٍ ما بشكلٍ وحيد وأوحد؛ بل هناك نظامٌ إحداثي يكون استخدامه أسهل من آخر. ويتغير عدد الإحداثيات المستعملة لوصف حركة نظامٍ ما بتغير الإحداثيات من ديكارتيةٍ أو قطبيةٍ أو طبيعية. ويمكننا استخدام عددٍ معين من هذه الإحداثيات لوصف الحركة بشكلٍ كامل، والذي لن يقل عن عدد درجات الحُرِّية.

إذا كان عدد القيود المفروضة على نظامٍ ما مساوياً لعدد الإحداثيات الديكارتية المعرفة لحركة جسيمات النظام، $N=3n$، فإن هذا النظام سيكون مقيداً، ولا حراك فيه. وحتى يتحرك النظام، يستلزم أن يكون عدد القيود أقل من عدد الإحداثيات، أي $N<3n$. هذا يعني أن إحداثيات جسيمات النظام غير مستقلةٍ بعضها عن بعض، بل ويمكن إيجاد عدد من الإحداثيات، مقداره N بواسطة الإحداثيات المتبقية $3n-N$. لهذا ، يمكن اعتبار الإحداثيات المتبقية للنظام إحداثيات مستقلة يمكنها أن تأخذ أية قيمة، بينما تتحدد قيم الإحداثيات N من معادلات القيود كدوال تلك الإحداثيات المستقلة. وعلى هذا الأساس؛ فإن تحديد وضع النظام يستلزم معرفة $(3n-N)$ إحداثي من إحداثيات النظام ال $3n$ بالنسبة لإطار إسنادٍ قصوري.

ويمكن للإحداثيات المستقلة التي ستحدد موضع النظام تحديداً تاماً أن تكون أيّ بارامترات مستقلةٍ، بل ويمكن اختيارها لتأخذ أي وَحْدَاتٍ بُعْدِيَّة Dimension Units، بل وأيُّ معنىً هندسي (فيزيائي) كأطوال مستقيمات، أقواسٍ وزوايا أو حتى مساحات .... إلخ. وتُسمى البارامترات المستقلة بعضها عن بعض، أياً كانت أبعادها التي يساوي عددها عدد درجات حُرِّيَة النظام أو الجسيم، وتحدد مواضع جسيمات النظام تحديداً وحيد القيمة بالإحداثيات المعممة للنظام. وسنرمز للإحداثيات المعممة تلك بالرمزين q_k ، $k=1,2,....S$ و $S=3n-N$.

وتبعاً لذلك يتحدد موضع النظام ب S إحداثي معمم

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ ....q_k\ ....q_s \qquad 3.10$$

أو كإحداثيات جسيمات النظام بدلالة الإحداثيات المعممة

$$\begin{aligned} x_i &= x_i\ (q_1,\ q_2,\ q_3,\ ....q_k\ ....q_S\ ) \\ y_i &= y_i\ (q_1,\ q_2,\ q_3,\ ....q_k\ ....q_S\ ) \\ z_i &= z_i\ (q_1,\ q_2,\ q_3,\ ....q_k\ ....q_S\ ) \end{aligned} \qquad 4.10$$

وبصيغة متجهات الموضع من مركز الإطار القصوري

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i\ (q_1,\ q_2,\ q_3,\ ....q_k\ ....q_S) \qquad 5.10$$

وعند حركة النظام تتغير إحداثياته المعممة تغيراً مستمراً بدلالة الزمن. وتتحدد معادلات هذه الحركة بالصيغة التالية:

$$q_1 = q_1\,(t)\ ,\ q_2 = q_2\,(t)\ ,\ ....q_k = q_k\,(t)\ ......q_S = q_S\,(t) \qquad 6.10$$

التي تسمى بالمعادلات الكينماتيكية لحركة النظام في الإحداثيات المعممة. من جهةٍ أخرى، تدعى مشتقات الإحداثيات المعممة الأولى بالنسبة للزمن بالسرعات المعممة للنظام ويرمز لها كالمشتقات

$$\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}\ \ k=1,2,........,S \qquad 7.10$$

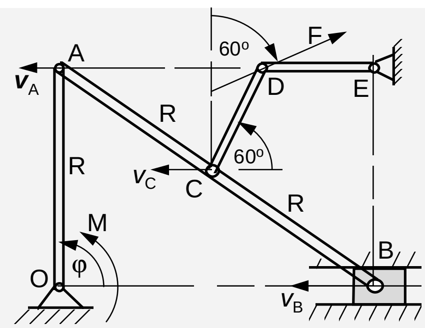
كما تُدعى مشتقات الإحداثيات المعممة الثانية بالنسبة للزمن بالتسارعات المعممة للنظام

$$\ddot{q}_k = \frac{d\dot{q}_k}{dt} = \frac{d^2 q_k}{dt^2}\ \ k=1,2,..........,S \qquad 8.10$$

وتعتمد أبعاد السرعات المعممة والتسارعات المعممة على أبعاد الإحداثيات المعممة نفسها، فإذا كانت q_k مقداراً خطياً فإن $\dot{q}_k$ تكون سرعةً خطية، وتكون $\ddot{q}_k$ تسارعاً خطياً. وإذا كانت q_k زاويةً تكون $\dot{q}_k$ سرعةً زاوية، وتكون $\ddot{q}_k$ تسارعاً زاوياً، وأخيراً إذا كانت q_k مساحةً فإن $\dot{q}_k$ تكون سرعةً قطاعية، وتكون $\ddot{q}_k$ تسارعاً قطاعياً.

4.10 الإزاحات الافتراضية [1] والممكنة Virtual and Possible Displacements

عند دراســـة الاتزان الإســـتاتيكي لنظام الأجسام الساكنة يتم تجزئة النظام إلى عناصره ومن ثَمّ تحليل اتزان كل جسمٍ على حدة، وذلك باستبدال تأثير الأجسام الأخرى بردود أفعالها على الجسم المعين. وعندما يكون عدد أجسام النظام كبيراً تصبح هذه الطريقة مطولةً، إذ يرتبط حلها بضرورة حل عددٍ كبيرٍ من المعادلات ذات المجاهيل الكثيرة.



شكل 3.10

وفي الديناميكا تعتبر حركة النظام المقيد بقيود عددها N محدودة. إذ لا يمكن أن تكون اعتباطيةً لوجود القيود في النظام. لذلك تَكْتَسِبُ جسيمات النظام إزاحات لا تغير من وضع النظام ولا حتى من شكله، كما تكون هذه الإزاحات متناهيةَ الصغر، ندعوها بالإزاحات الافتراضية. وتعرف **الإزاحات الافتراضية بالمجموع الهندسي للإزاحات المتناهية الصغر لجسيمات النظام التي تسمح بها جميع قيود النظام في اللحظة المعطاة.** وهي لذلك، إزاحات جسيمات النظام من أحد الأوضاع الممكنة له في اللحظة المعينة إلى وضعٍ آخر قريبٍ منه مسافةً لا نهائيةً في نفس اللحظة الزمنية. فمثلاً، لا يمكن أن تتحدد الإزاحة الافتراضية لمرفق الآلة المرفقية OA، **شكل** 3.10، الزاوية φ = 150 °. لأن شروط اتزان النظام - الآلة المرفقية لحظتئذٍ تحت تأثير العزم **M** والقوة **F** تصبح مغايرةً عن الموضع الابتدائي φ = 90 °. كذلك لا يمكن اعتبار الإزاحة الافتراضية المتناهية الصغر للمنزلق B على امتداد العمود BE بل ستكون منطبقةً على الخط BO.

[1] **الافتراضية** Virtual: مصطلحٌ كلاسيكي يعني الزائفَ أو الخياليّ، وفي الإستاتيكا تعني الحركة الافتراضية أن الجسيم أو النظام يتحرك حركةً خيالية (لا تتم في الواقع) حول وضع الاستقرار Equilibrium State (الاتزان) للجسيم أو للنظام. وحتى نشير بوضوحٍ إلى أننا لا نتعامل مع إزاحاتٍ حقيقية للنظام استخدمنا الحرف الإغريقي δ لنعني به المشتقة الأولى للكمية الافتراضية المعطاة للنظام، بدلاً من الحرف اللاتيني d المعروف كرمزٍ للإزاحة الحقيقية. ولذلك، يرمز للإزاحة الافتراضية لجسيمٍ ما الناتجة من الحركة الافتراضية بـــ $\delta\mathbf{r}$. وقياساً على ذلك، يعرف الشغل الافتراضي δA للقوة **F** المبذول على الجسيم - النظام عند إزاحته $\delta\mathbf{r}$ رياضياً

$$\delta A = \mathbf{F} \times \delta\mathbf{r}$$

وفي الحقيقة؛ يمثل متَّجِه الإزاحة الحقيقية $d\mathbf{r}$ تفاضل متجه الموضع $d\mathbf{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}$، بينما يمثل متَّجِه الإزاحة الافتراضية $\delta\mathbf{r}$ التغير في متَّجِه الموضع؛ $\delta\mathbf{r} = \delta x\,\boldsymbol{i} + \delta y\,\boldsymbol{j} + \delta z\,\boldsymbol{k}$.

سندرس حركة البندول الرياضي **شكل م 6.4**. وكما هو معروف ، تتحدد حركته بالإحداثيين y و z والقيد $y^2 + z^2 = R^2$. أي أن n = 2 و N = 1؛ وبالتالي فعدد درجات حُرِّيّته كنظام 1 ، S = n -N = 2 -1 =1. هذا القيد - القضيب عديم الكتلة - يجعل الحركة في قوس دائري ويسمح للإزاحة الافتراضية المتناهية الصغر للجسيم - المتَّجِه الأولي- **δr** أن تكون منطبقةً على مسار القوس $P_o P$ وللجهتين في الموضع M. بينما يمثل متجه الإزاحة الحقيقية لنفس الجسيم - المتجه الأولي - **dr** على المسار وفي اتِّجَاه الحركة، وهو في مرحلة الذهاب للأعلى ولليمين.

لنفترض أن جسيماً تحرك على سطح هولونوميٍ، مستقرٍ وثنائي الجانب، معادلته f(x, y, z) = 0، واكتسب إزاحة افتراضية متناهية الصغر **δr** ، فتغيرت إحداثياته من (x,y,z) إلى (x+δx,y+δy,z+δz). هذه الإحداثيات الجديدة تعرف القيد - معادلة السطح f (x+δx,y + δy, z + δz) = 0. إذا حلّلنا المعادلة الأخيرة بدلالة مُتَسَلْسِلَة تايلور Taylor`s Series وذلك بأخذ الحد الأول لكل إحداثيّ يكون

$$f (x +\delta x , y +\delta y , z +\delta z) = f(x ,y ,z)+ \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + ... \qquad 9.10$$

و بعد طرح المعادلة الأصلية، f(x,y,z)=0، منها نحصل على المعادلة

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \quad \Rightarrow \ \mathbf{grad}\ f \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \qquad 10.10$$

وهذا يعني أن مُتَّجِه الإزاحة الافتراضية **δr** عمودي على مُتَّجِه التدرج **grad f**. أي أن مُتَّجِه الإزاحة الافتراضية **δr** يتواجد في المستوى المماس للسطح في الموقع المذكور.

5.10 شغل القوى الافتراضي Virtual Work

يعرف الشغل الافتراضي للقوة $\mathbf{F}_i$ المؤثرة على جسيمٍ ما، بأنه شغل القوة المبذول عند معاناة الجسيم إزاحةً افتراضية $\delta \mathbf{r}_i$، أو رياضياً

$$\delta A_i = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \qquad 11.10$$

وبكتابة المعادلة لكل جسيمات النظام وجمعها حداً حداً نجد أن الشغل الافتراضي الكلي لكل جسيمات النظام

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \qquad 12.10$$

وكما هو معروف تتحرك جُسَيْمات النظام بتسارعٍ يختلف عن تسارع جسيمات النظام الحر؛ وذلك لوجود القيود وردود أفعالها. هذه الردود غير معروفة مسبقاً، إذ يمكن اعتبارها جزءً من القوى الخارجية المؤثرة على النظام. كما يمكن تقسيم القيود إلى قيودٍ مثالية وأخرى حقيقية. وتكون **القيود مثاليةً** إذا كان **مجموع عناصر الشغل الافتراضي الذي تبذله ردود أفعالها في أية إزاحةٍ افتراضية للنظام مساوياً للصفر**. أو رياضياً

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i \cdot \delta \mathbf{r}_I = 0 \qquad 13.10$$

حيث إن $\mathbf{N}_i$ رد الفعل العمودي للقيد المثالي المؤثر على الجسيم، بينما الإزاحة الافتراضية $\delta\mathbf{r}_i$ فعموديةٌ على رد الفعل $\mathbf{N}_i \perp \delta\mathbf{r}_i$. أما **القيود الحقيقية** فتعرف بالقيود التي يكون **مجموع عناصر الشغل الذي تبذله ردود أفعالها عند أية إزاحة افتراضية للنظام مساوية لمقدارٍ محدد**. أو رياضياً

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \varepsilon \neq 0 \qquad 14.10$$

وإذا كان الجسيم ذا قيدٍ واحدٍ حقيقي، يتكون رَدُّ فِعْلِه المؤثر على الجسيم من المركبتين: العمودية $\mathbf{N}_i$ والمماسية $\mathbf{F}_\mu$ ،حيث تدعى الأخيرة بقوة الاحتكاك الانزلاقي. وبالعادة، تكون المركبة $\mathbf{N}_i$ عموديةً على متَّجِه الإزاحة الافتراضية، بينما تتسامت قوة الاحتكاك الانزلاقي مع خط عمل الشغل الافتراضي وبالاتجاه المعاكس للحركة. الشغل الافتراضي لهذه القوى

$$\begin{aligned} \delta A &= \mathbf{N}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k + \mathbf{F}_\mu \cdot \delta\mathbf{r}_k \\ &= 0 + F_\mu \left|\delta r_k\right| < 0 \end{aligned}$$

وبالعادة وعند حل العديد من المسائل الديناميكية تلغى قوة الاحتكاك الناتجة بين الجسيمات المتحركة، إذ تعتبر القيود لحظتها مثالية. وتصبح المعادلة 13.10 المعادلة الأساسية في الميكانيكا التحليلية.

6.10 مبدأ الشغل الافتراضي [2] The Principle of Virtual Work

يعرف عن نظام الجسيمات أنه متزنٌ إستاتيكياً Static Equilibrium بالنسبة لإطارِ إسنادٍ قصوري إذا كانت كل جسيماته غير متحركة ومحصلة القوى المؤثرة على كلٍّ جسيمٍ تساوي الصفر. أي أن الشرط الوحيد للاتزان الإستاتيكي هو أن سرجهة وتسارع كلًّ جسيمٍ من جسيمات النظام بالنسبة لإطار الإسناد القصوري تساويان الصفر.

يقوم مبدأ الشغل الافتراضي على تحديد الشروط الضرورية والكافية لاتزان نظام الجسيمات استاتيكياً. هذا المبدأ وضعه في صورةٍ قريبة لما هو معروف اليوم وبدون برهان عالم الرياضيات والميكانيكا السويسري **بيرنولي** Bernoulli. وقد صاغه **لاجرانج** Lagrange بصورته العامة وأثبته لإول مرة والذي ينص: **من الضروري والكافي لاتزان القوى المؤثرة على جسيمات نظامٍ متحركٍ من السكون، ومقيدٍ بقيودٍ إسكليرونومية مثالية وثنائية الجانب، أن يكون مجموع أشغال القوى المؤثرة على هذا النظام المبذولة عند أية إزاحةٍ افتراضيةٍ له مساوياً للصفر**. ويمكن التعبير عن هذا المبدأ بالشرط الرياضي

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \qquad 15.10$$

كما يمكن التعبير عن اتزان نظام جسيمات ما بمعنى آخر عملي، وهو الوضع الذي يظل فيه النظام طوال الوقت، إذا كان ضمن نطاقه عند اللحظة الابتدائية، وكانت سرعات كل جسيماته مساوية للصفر[3].

[2] يدعى أيضاً **مبدأ لاجرانج للإزاحات الإفتراضية** Lagrange's Principle of Virtual Work أو **المعادلة العامة للاستاتيكا** General Equation of Statics .

[3] انظر **ف. جانتماخر**: الميكانيكا التحليلية من قائمة المراجع العربية ، ص 32 و ص 220.

سنثبت أن الشرط 15.10 ضروريٌ وكافٍ لاتزان نظام الجسيمات المقيد بقيودٍ سكليرونومية، مثالية وثنائية الجانب. وسيتم ذلك بطريقة إثبات ضرورة الشرط ومن ثم إثبات أن هذا الشرط كافٍ.

أولاً : **ضرورة الشرط**

نفترض أن النظام المقيد بالقيودٍ الإسكليرونومية المثالية والثنائية الجانب متزنٌ. هذا يعني أن كل جسيماته متزنةٌ أيضاُ. ندرس اتزان الجسيم i من جسيمات النظام بعد تحرره من كل القيود المؤثرة عليه. يؤثر عليه بالإضافة إلى محصلة القوى المؤثرة $\mathbf{F}_i$ محصلة رد فعل القيود $\mathbf{N}_i$ بحيث يتحقق لاتزانه استاتيكياً الشرط الرياضي التالي

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i = 0 \qquad 16.10$$

إذا ضربنا المعادلة 16.10 قياسياً بمتجه الإزاحة الافتراضية $\delta\mathbf{r}_i$، وكررناها لكل جسيمات النظام

$$(\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i + \mathbf{N}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i) = 0 \qquad 17.10$$

ولأن القيود مثاليةٌ ، يكون مجموع عناصر الشغل الافتراضي الذي تبذله كل ردود أفعالها عند أية إزاحةٍ افتراضية للنظام مساوياً للصفر، $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{N}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$، وذلك استناداً إلى المعادلة 13.10. وتبعا لذلك، تؤول المعادلة 17.10 إلى الشكل التالي

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \qquad 18.10$$

أي أن مجموع عناصر الشغل الافتراضي الذي تبذله جميع القوى المؤثرة عند أية إزاحةٍ افتراضية للنظام يساوي الصفر. وهذا إثبات ضرورة الشرط.

ثانياً : **كفاية الشرط**

إذا كان النظام غير مُتَّزِن، فإن جسيماً واحداً على الأقل من جسيمات النظام يتحرك من السكون بتسارع. وتبعاً لذلك لاتساوي محصلة القوى المؤثرة $\mathbf{F}_{ri}$ على الجسيم المذكور الصفر

$$\mathbf{F}_{ri} = \mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i \neq 0 \qquad 19.10$$

أي أن الجسيم i، وتحت تأثير محصلة القوى $\mathbf{F}_{ri}$ سيتحرك بتسارعٍ محدد. وبضرب طرفي المتباينة 19.10 بالإزاحة الافتراضية $\delta\mathbf{r}_i$ قياسياً ينتج أن

$$(\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i > 0 \qquad 20.10$$

لكن، جميع جسيمات النظام المتبقية متزنـــةٌ. أو رياضياً

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\mathbf{F}_j \times \delta\mathbf{r}_j + \mathbf{N}_j \times \delta\mathbf{r}_j) = 0 \qquad 21.10$$

$$j = 1, 2, \ldots\ldots i-1, i+1 \ldots\ldots n$$

و بعد جمع المتباينة 20.10 والمعادلة 21.10 ينتج أن

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i + \mathbf{N}_i \times \delta\mathbf{r}_i) > 0 \qquad 22.10$$

ومرة أخرى، لأن القيود مثالية ، يساوي الجزء الثاني من المتباينة الأخيرة صفراً، $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{N}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$ ، ويؤول الجزء المتبقي منها للشكل المبسط التالي

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \rangle\ 0 \qquad 23.10$$

معاكساً بذلك الشرط - المعادلة 15.10. أي إن وجود جسيمٍ واحد في النظام، غير مُتَّزِن، يجعل المعادلة 15.10 غير صحيحة. إن الفرضية الخطأ - وجود جسيمٍ واحدٍ في النظام غير مُتَّزِن، أدت إلى نتيجةٍ مغايرة، وهو أن النظام غير مُتَّزِن. وحيث إن النتيجة هي أحد احتمالين، أحدهما - النظام غير مُتَّزِن- خطأ، فإن الاحتمال الآخر - النظام مُتَّزِن - هو الصحيح.

إن أهميــة **مبدأ الشــغل الافتراضي** تكمن في عدم تقسيم النظام إلى جســيماتٍ منفصلــة، كما هو الحال في الإستاتيكا، إذ يؤخذ النظام ككل متكامل. إن تقسيم النظام إلى جسيماتٍ منفصلة يؤدي بالضرورة إلى إيجاد ردود أفعال داخلية، قد تكون غير مطلوبة لحل المسألة قيد البحث، والذي بدوره يعقد الحل أكثر، خاصة للأنظمة كثيرة الجسيمات.

ومن الشائع في الإستاتيكا إيجاد ردود الأفعال الداخلية في الأنظمة الميكانيكية غير المتحركة. لقد تطلب حل مســائل الإســتاتيكا إســتخدام مبدأ التحرر من القيد لكل عنصرٍ من عناصر النظام، ومن ثَمَّ تحديد مجموعة معادلات الاتزان المنفصلة. ويقابل مجموعة أجســام النظام ثلاثة أضعاف عددها من المعادلات. أمَّا في الميكانيكا التحليلية فيتم حل هذه المســـائل بطريقة **مبدأ الشــغل الافتراضي** باســـتخدام مبدأ التحررِ من القيد للتخلص من قيدٍ واحد واستبدال تأثيره برد فعله $\mathbf{N}_k$. عندئذٍ يصبح النظام الجديد طليقاً (حر الحركة) وذا درجة حُرِّيَّةٍ واحدةٍ فقط ،1 = S [4]. فباعطاء النظام الجديد إزاحةً افتراضيةً معينة $\delta\mathbf{r}_k$ وحساب الشغل الافتراضي الكلي والذي يساوي صفراً، وفقاً للمعادلة 22.10 ، يتحدد رد الفعل $\mathbf{N}_k$، ثم نتخلص من قيدٍ آخر وهكذا دواليك. ولتوضيح ذلك مع تطبيقاتٍ مباشرةٍ على مبدأ الشغل الافتراضي نستعرض الأسئلة المحلولة التالية .

[4] تساوي درجة حُرِّيَّة الجسيم المقيد والساكن الحركة الصفر S = 0 .

أسـئـلــةٌ مــحــلــولــة

7.10 مبدأ لاجرانـج دالمبير[5] Lagrange D'Alembert's Principle

يقوم **مبدأ الشغل الإفتراضي** على حل مسائل الميكانيكا الساكنة - الإستاتيكا، بينما يكفل **مبدأ دالمبير** استخدام معادلات الاتزان الإستاتيكية لحل المسائل الديناميكية. هذان المبدآن كانا نتاجَ قواعدَ عامةٍ تصف حركة نظام الجسيمات كمعادلاتٍ تفاضلية من قوانين نيوتن. إن الربط بين المبدأين السابقين ينتج مبدءاً آخر يدعى **مبدأ لاجرانـج دالمبير** والذي بواسطته يمكن تعريف المعادلات التفاضلية لحركة الأنظمة.

اعتبر نظاماً، ذا جسيماتٍ عددها n، مقيداً بقيودٍ هولونوميةٍ مستقرة، كما أنها مثالية وثنائية الجانب. نفصل أحد جسيمات النظام، وليكن i، كتلته m_i وتسارعه $\mathbf{a}_i$. إذا عرفنا محصلة القوى المؤثرة على هذا الجسيم بالقوة $\mathbf{F}_i$ ومحصلة ردود الأفعال $\mathbf{N}_i$، وأضفنا إلى هاتين القوتين قوة قصور الجســـيم $\mathbf{F}_{i,\mathrm{in}}$؛ عندئذٍ تكون هذه القوى الثلاث في حالة اتِّزان وفقاً لمبدأ دالمبير. ورياضياً فمجموعها الهندسي يساوي صفراً، انظر المعادلة 32.4 مضافاً لها الرمز i

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i + \mathbf{F}_{i,\mathrm{in}} = 0 \qquad 24.10$$

وبتطبيق مبدأ الشغل الافتراضي لهذه القوى، وذلك بضرب المعادلة الاتجاهية 24.10 قياسياً بمتجه الإزاحة الافتراضية $\delta\mathbf{r}_i$، ثم جمع المعادلات الناتجة لكل جسيمات النظام حداً حداً

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i + \mathbf{F}_{i,\mathrm{in}}) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

أو بصيغةٍ أخرى

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i,\mathrm{in}}) \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \qquad 25.10$$

ولإن القيود مثالية فالمجموع الأخير يتلاشى $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$، وفْقَاً للمعادلة 13.10. ويتبقى المجموع الأول فقط الذي يساوي الصفر

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i\,\mathrm{in}}) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

أو بشكلٍ أكثر تحديداً، وبعد استبدال قوة القصور $\mathbf{F}_{i,\mathrm{in}} = -m_i\mathbf{a}_i$

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i - m_i a_i) \cdot \delta r_i = 0 \qquad 26.10$$

---

[5] يدعى هذا المبدأ أيضاً **معادلة الديناميكا العامة** General Equation of Dynamics.

وتعرف هذه المعادلة في الميكانيكا التحليلية التحليلية **بمبدأ لاجرانـج دالمبير**، والذي ينص: **عند حركةٍ النظام المقيد بقيود مثالية ومستقرة وفي أي لحظةٍ زمنيةٍ معطاة، يكون مجموع الشغل الأولي الذي تبذله كل القوى الخارجية وقوى القصور عند أية إزاحة افتراضية للنظام مساوياً للصفر**. وهذه المعادلة الاتجاهية 26.10 تُكتب بصورة تحليلية بدلالة الإحداثيات الديكارتية، انظر المعادلة 14.I

$$\sum_{i=1}^{n}(Fx_i - m_i\ddot{x}_i)\cdot\delta x + \sum_{i=1}^{n}(Fy_i - m_i\ddot{y}_i)\cdot\delta y + \sum_{i=1}^{n}(Fz_i - m_i\ddot{z}_i)\cdot\delta z = 0 \quad 1.26.10$$

وتكفل المعادلات 26.10 و1.26.10 تكوين المعادلات التفاضلية لحركة الأنظمة الميكانيكية. ويستخدم **مبدأ لاجرانـج دالمبير** لإيجاد المعادلات التفاضلية لأي نظام ميكانيكي، بينما لا يعتبر مجدياً ولا حتى عملياً لإيجاد ردود أفعال القيود.

حـــل المسائل

يتطلب حلُّ المسائل استناداً **لمبدأ لاجرانـج دالمبير**

1- اختيار نقطة الأصل لإطار إسنادٍ قصوري وتحديد نظام الإحداثيات ، الديكارتي مثلاً.

2- تحديد القوى الخارجية المؤثرة والقوى القصورية في النظام.

3- كتابة متجهات مواضع نقط تأثير القوى الخارجية وقوى القصور ومن ثَمَّ تعريف متجهات الإزاحة الافتراضية $\delta\mathbf{r}_i$.

4- تعويض كلٍ من النقاط 2 - 3 في المعادلة العامة للديناميكا 26.10 أو 1.26.10 من ثمَّ حلهما.

8.10 القوى المعممة Generalized Forces

اعتبر نظاماً ذا جسيماتٍ عددها n ، تؤثر عليه مجموعة القوى $\mathbf{F}_i$ ، i =1,2,3,......n، وقدد فرضت عليه قيوداً هولونومية، مستقرة، مثالية وثنائية الجانب وله درجات حرية، عددها S. من معادلة 5.10 نجد أن مقدار التغير (الافتراضي) في متجه موضع الجسيمٍ i من جسيمات النظام، يكون

$$\delta\mathbf{r}_i = \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_3}\delta q_3 \quad \ldots\ldots$$

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{K=1}^{S}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_K}\delta q_K \qquad k=1,2,3,\ldots\ldots S \qquad 27.10$$

يتحدد الشغل الافتراضي الكلي لجميع القوى المؤثرة على النظام باستبدال $\delta\mathbf{r}_i$ من المعادلة 27.10 وتعويضها في المعادلة 12.10 لينتج أن

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\cdot\sum_{K=1}^{S}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_K}\delta q_K \qquad 28.10$$

وبترتيب آخر

$$\delta A = \sum_{K=1}^{S} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K} \delta q_K \quad i=1,2,\ldots\ldots\ldots,n \quad \& \quad k=1,2,3,\ldots\ldots.S$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{S} Q_K \cdot \delta q_K \qquad 29.10$$

$$\delta A = \sum_{k=1}^{S} \delta A_k = Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \ \ldots\ldots + Q_S\,\delta q_S \qquad 1.29.10$$

حيث إن

$$Q_K = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K} \qquad 30.10$$

مجموع حواصل ضرب التفاضل الجزيئي لمتجه الموضع $\partial \mathbf{r}_i$ بدلالة الإحداثي المعمم ∂q_k في القوة المناظرة $\mathbf{F}_i$، التي تدعى بالقوى المعممة. ومن المهم التأكيد أن عدد القوى المعممة يساوي عدد الإحداثيات المعممة، وأن كلاً منهما يكافئ عدد درجات حرية النظام.

وتعتمد أبعاد القوى المعممة على أبعاد الإحداثيات المعممة المناظرة. فإذا كانت أبعاد الإحداثي المعمم q هي المسافة بالمترات، فإن أبعاد القوة المعممة هي أبعاد القوة الحقيقية بالنيوتن. أما إذا كانت q مقاسةً كانحرافٍ زاوٍ بالدائرية [rad]، فإن أبعاد القوة المعممة هي أبعاد العزم الدوراني، أو نيوتن متر. وفي كل الأحوال فإن حاصل ضرب القوة المعممة والإزاحة الافتراضية يجب أن تكافئ أبعاد الشغل.

وحتى نحسب القوة المعممة Q_k، $k = 1,2,\ldots.,S$، يُعطى النظام إزاحةً افتراضية مستقلة، يكتسب فقط خلالها الإحداثي المعمم q_k تغيراً (افتراضياً) مقداره δq_k، $\delta q_k \neq 0$، في حين تظل التغيرات في الإحداثيات المعممة الأخرى صفراً، أي أن $\delta q_j = 0$، لقيم $j=1,2,\ldots.S$ و $j \neq k$. ثم نحسب الشغل الافتراضي δA_k لكل القوى المؤثرة على النظام عند تلك الإزاحة الافتراضية، $\delta A_k = Q_k \cdot \delta q_k$، فنحصل على المعامل المرافق للتغير في الإحداثي المعمم δq_k و هو Q_k؛ الذي يكافئ القوة المعممة المطلوبة. وهذا ما سنراه في السؤال المحلول التالي.

أســئــلــةٌ مــحــلــولــةٌ

حالة القوى المحافظة

إذا كانت جميع القوى المؤثرة على النظام قوىً محافظة، فإن حساب القوى المعممة 30.10 يتم باستبدال محصلة القوى المحافظة $\mathbf{F}_i$ من المعادلة 17.5، ومتَّجِه الموضع $\mathbf{r}_i$ بالعلاقة 2.14.I، بعد إضافة الرمز $\boldsymbol{i}$ للإحداثيات الديكارتية

$$\mathbf{F}_i = -\,\mathbf{grad}\ \Pi \quad \& \quad \mathbf{r}_i = x_i\,\boldsymbol{i} + y_i\,\boldsymbol{j} + z_i\,\boldsymbol{k}$$

وتبعاً لذلك نكتب القوة المعممة

$$Q_K = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\boldsymbol{k}\right\} \cdot \left\{\frac{\partial (x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k})}{\partial q_k}\right\}$$

$$Q_K = -\sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right\} \qquad 31.10$$

$i = 1, 2, \ldots n\ , k = 1,2,\ldots S$

من جهةٍ أخرى؛ تعتمد طاقة الوضع Π على الإحداثيات الديكارتية لجسيمات النظام x_i ، y_i و z_i. وهذه الإحداثيات هي دوال إحداثيات معممة، لينتج أن طاقة الوضع دالة إحداثياتٍ معممة أيضاً

$$\Pi = \Pi\,(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_k \ldots\ldots q_S)$$

التفاضل الجزيئي لطاقة الوضع بدلالة الإحداثي المعمم q_k يُعطي

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right\} \qquad 32.10$$

$i = 1\ , 2\ , \ldots n\ , k\ = 1\ , 2, \ldots$

وبربط المعادلتين الأخيرتين 31.10 و 32.10 مع بعض ينتج أن

$$Q_k = -\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \qquad k=1,2,3,\ldots\ldots S \qquad 33.10$$

أي أن القوة المعممة تساوي سالب التفاضل الجزيئي لطاقة الوضع بدلالة الإحداثي المعمم.

9.10 معادلات لاجرانـج من النوع الثاني

لقد استطعنا في فصولٍ سابقةٍ استخدام **مبدأ دالمبير** لحل المسائل الخاصة بكلٍ من الجسيم المقيد والجسم الجاسيء. أمَّا **مبدأ دالمبير لاجرانـج** فقد ساعد على تكوين المعادلات التفاضلية لحركة النظام. من جهة أخرى؛ إذا كان النظام ذا عدة أجسام جاسئة، ويتحرك حركة ليست انتقالية، فإن استخدام مبدأ الثنائي **دالمبير لاجرانـج** ولدرجات حرية عديدة، سيعقد تكوين تلك المعادلات التفاضلية لحركة النظام. إذ بالإضافة لحساب الشغل الافتراضي للقوى المؤثرة المنضوية تحت اسم المتجه الرئيسي للقوى والعزم الرئيسي لقوى القصور، من الضروري التخلص من الإحداثيات غير المستقلة وتغيراتها. ولهذا، من الأفضل اختصار الطريق بتكوين معادلاتٍ تفاضليةٍ لتعريف حركة النظام بدلالة الإحداثيات المعممة والتي تندرج تحت اسم **معادلات لاجرانـج من النوع الثاني**.

اعتبر نظاماً ذا جســيمات عددها n، ومقيداً بقيود إسكليرونومية مثالية وثنائية الجانب وذا درجات حرية، عددها S. كما تتحدد مواضع جسيمات النظام بالنسبة لإطار الإسناد القصوري بالإحداثيات المعممة $q_1,q_2,q_3,\ldots..q_k\ldots\ldots q_S$. وللتعميم نفترض أن القيود حقيقية وزمنية بالإضافة إلى أنها سكليرونومية وثنائية الجانب. نحدد المعادلة 33.10 و**مبدأ لاجرانـج دالمبير** كنقطة بداية **لمعادلات لاجرانـج من النوع الثاني**. فنستبدل متَّجِهِ الإزاحة الافتراضية $\delta \mathbf{r}_i$ ، بقيمته من المعادلة 15.10، والتسارع بقيمته كمشتقة السرجهة، $\mathbf{a}_i = \dfrac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}$

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}_i - m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt})\cdot\sum_{K=1}^{S}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K}\delta q_K = 0$$

وبترتيبها بشكلٍ آخر يكون

$$\sum_{K=1}^{S}\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i \cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K} - \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K}\right\}\delta q_K = 0 \qquad 34.10$$

نحلِّل هذه المعادلة مجموعاً مجموعاً. فالمجموع الداخلي الأول في المعادلة 34.10 يساوي القوة المعممة، وفْقاً للمعادلة 18.10، بينما يتحدد المجموع الثاني من عنصره الذي نكتبه بالشكل الجديد

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K} = \frac{d}{dt}\left\{ m_i \boldsymbol{v}_i \cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K}\right\} - m_i \boldsymbol{v}_i \cdot\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K}\right\} \qquad 35.10$$

والذي يتطلب معرفة كل جزءٍ من هذه الأجزاء. فتتحدد سرجهة الجسيم ***i*** المقيد بقيودٍ زمنية من مشتقة متَّجِه الموضع، انظر المعادلتين 5.10 و 15.10 مضافا لهما المتغير t

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{K=1}^{S}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K}\dot{q}_K + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \qquad 36.10$$

ومن المعادلة 36.10 نجد أن التفاضل الجزيئي للسرجهة بدلالة السرعة المعممة يساوي التفاضل الجزيئي لمتَّجِه الموضع بدلالة الإحداثي المعمم. أو رياضياً

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_K} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K} \qquad 37.10$$

ونكتب مشتقة التفاضل الجزيئي للإحداثي بدلالة السرعة المعممة بشكلٍ آخر

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K}\right\} = \frac{\partial \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{\partial q_K} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_K} \qquad 38.10$$

لينتج بعد تعويض المعادلتين 37.10 و38.10 في المعادلة 35.10 أن

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_K} = \frac{d}{dt}\left\{ m_i \boldsymbol{v}_i \cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_K}\right\} - m_i \boldsymbol{v}_i \cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_K} \qquad 39.10$$

ومرةً أخرى بتعويض المعادلة 39.10 في المعادلة 34.10

$$\sum_{K=1}^{S}\left\{Q_K - \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left\{ m_i \boldsymbol{v}_i \cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_K}\right\} - \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot\left\{\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_K}\right\}\right\}\delta q_K = 0 \qquad 40.10$$

والتي يمكن ترتيبها بطريقةٍ مغايرة. فبإخراج معاملي الاشتقاق الزمني $\frac{d}{dt}$ والتفاضل الجزيئي بدلالة السـرعة المعممة $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$ من المجموع الثاني وإخراج معامل التفاضل الجزيئي بدلالـة الإحداثي المعمم $\frac{\partial}{\partial q_k}$ من المجموع الثالث، تؤول المعادلة 40.10 إلى الشكل الجديد

$$\sum_{K=1}^{S}\left\{Q_K - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_K}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{\partial}{\partial q_K}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}\right\}\delta q_K = 0 \qquad 41.10$$

من جهةٍ أخرى؛ يعرف كلٌّ من المجموعين الداخليين المتشابهين بطاقة حركة النظام المكون من جسيماتٍ عددها n، كتلها m_i وسرجهاتها v_i، $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$. وباستبدال ذلك في المعادلة 41.10 نحصل على

$$\sum_{K=1}^{S}\left\{Q_K - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K} + \frac{\partial T}{\partial q_K}\right\}\delta q_K = 0 \qquad 42.10$$

وحيث إن التغير الافتراضي لا يساوي صفراً، $\delta q_k \neq 0$ ، فيمكن كتابة المعادلة 41.10 لكل إحداثي معمم، أو رياضياً

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K} - \frac{\partial T}{\partial q_K} = Q_K \qquad k = 1,2,3,\dots\dots\dots,S \qquad 43.10$$

هذه المعادلات 43.10 معروفةٌ في الميكانيكا التحليلية **بمعادلات لاجرانج من النوع الثاني،** والتي تمثل **الشكل الأساسي لمعادلات لاجرانج**. وكما نرى، فهي تعرف حركة النظام بفئةٍ من المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية بدلالة الإحداثيات المعممة والسرعات المعممة مثلما هو الحال القوى المعممة. ومن الطبيعي أن يكافئ عدد هذه المعادلات عدد درجات حرية النظام.

إن أفضل تحليلٍ طبيعي ورياضي للمعادلات 43.10 يبين أن معدل تغير الزخم المعمم Generalized Momentum ، K_k، $K_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K}$ يساوي القوة المعممة Q_k الناتجة كمحصلة القوى المؤثرة مضافاً إليها الحد $\frac{\partial T}{\partial q_K}$ كقوة قصورٍ معممة Generalized Inertia Force ناتجة من الحركة في الإحداثيات المعممة الأخرى.

فعلى سبيل المثال ، للنظام المكون من أسفينٍ ينزلق على سطحه صندوقاً، **شكل** 4.10: الأسفين، كتلته M، يتحرك على سطحٍ أفقي بحيث تتحدد حركته بالإحداثي x_1، والصندوق، كتلته m، محمولاً على الأسفين وينزلق عليه بحيث تتحدد حركته بالإحداثي x_2. طاقة الحركة (للنظام) بدلالة سرعات عناصره

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_{2a}^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \sqrt{2}\,\dot{x}_1\dot{x}_2)$$

معدل تغير الزخم المعمم الأول ، k = 1

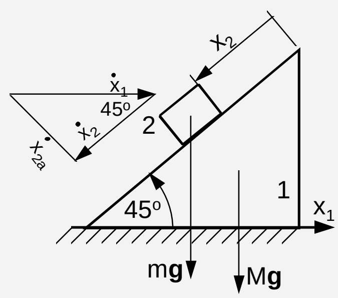
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = (M+m)\ddot{x}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}m\ddot{x}_2$$

إذ يساوي الجزء الأول على اليمين، $(M+m)\ddot{x}_1$ ، القوة (محصلة القوى) المؤثرة على النظام في الإتجاه x_1، بينما يساوي الجزء الثاني $-\frac{\sqrt{2}}{2}m\ddot{x}_2$ مركبة قوة القصور الناتجة من حركة النظام في الإتجاه x_2.

وتكمن أهمية **معادلات لاجرانج من النوع الثاني** بالنسبة لطرقٍ أخرى في اعتمادها على عدد درجات الحرية للنظام الديناميكي وليس على عدد العناصر المكونة له. مضافاً إلى ذلك عدم لزومية إيجاد ردود الأفعال

ضمن القوى المعممة. أما إذا كانت القيود حقيقية؛ عندئذٍ تحسب قوى الاحتكاك كما لو أنها قوىً مؤثرة ضمن القوى المعممة على النظام.

معادلات لاجرانج من النوع الثاني في حالة القوى المحافظة



شكل 4.10

إذا كانت القوى التي تؤثر على النظام المقيد بقيودٍ إسكليرونومية محافظةً، تُشتَق القوى المعممة للنظام من دالة طاقة الوضع Π، $\Pi = \Pi\,(q_1, q_2, \ldots, q_3)$، إذ تحسب قيمها وفْقَاً للمعادلات 21.10. وإذا استبدلنا القوة المعممة Q_k في المعادلة 43.10 بقيمتها من المعادلة 21.10 يكون

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K} - \frac{\partial T}{\partial q_K} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots,S \qquad 44.10$$

إذا عرفنا دالة لاجرانج L، Lagrangian Function

$$L = T - \Pi \qquad 45.10$$

كالفرق بين طاقتي الحركة والوضع للنظام، فإن معادلات لاجرانج من النوع الثاني 43.10 تأخذ الشكل الجديد التالي

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} - \frac{\partial L}{\partial q_K} = 0 \quad , k = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots,S \qquad 46.10$$

والذي يمثل **الشكل القياسي** Standard Form **لمعادلات لاجرانج**

حـــل المسائل

تستخدم معادلات لاجرانج 43.10 و 46.10 لدراسة حركة أي نظام ميكانيكي فرضت عليه قيود هندســية دون الارتباط بعدد الجســيمات أو الأجزاء المكونة للنظام، أو كيفية حركتها سواء أكانت مطلقة أو نسبية. ولهذا عند تكوين **معادلات لاجرانج من النوع الثاني - الشكل الأساسي**، معادلات 43.10 يتطلب:

1- تحديد عدد درجات حرية النظام واختيار الإحداثيات المعممة له.

2- تعريف النظام في وضع اعتباطي وتحديد القوى المؤثرة عليه.

3- حساب القوى المعممة وطاقة حركة النظام أثناء الحركة المطلقة والتعبير عنها بدلالة الإحداثيات المعممة و السرعات المعممة.

4- حساب التفاضلات الجزيئية لطاقة الحركة بالنسبة للسرعات المعممة $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K}$، والتفاضلات الجزيئية لطاقة الحركة بالنسبة للإحداثيات المعممة $\frac{\partial T}{\partial q_K}$، كلٌ على حدة ، ثم حساب مشتقة التفاضلات الجزيئية للطاقة بدلالة السرعات المعممة $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K}$، ومن ثم التعويض في معادلة 43.10 لنحصل بعد تكاملها على قانون حركة هذا النظام.

وفي حالة القوى المحافظة فإن تكوين **معادلات لاجرانج من النوع الثاني - الشكل القياسي**، معادلات 46.10 يتطلب:

1- تحديد عدد درجات حرية النظام واختيار الإحداثيات المعممة له.

2- تعريف النظام في وضع اعتباطي وتحديد القوى المؤثرة عليه.

3- حساب طاقتي حركة النظام T ووضع النظام Π بدلالة الإحداثيات المعممة.

4- تكوين دالة لاجرانج ، $L=T-\Pi$، بدلالة الإحداثيات المعممة.

5- حساب التفاضلات الجزيئية لدالة لاجرانج بالنسبة للسرعات المعممة أولاً ثُمَّ بالنسبة للإحداثيات المعممة ثانياً، وحساب مشتقة التفاضلات الجزيئية لدالة لاجرانج بدلالة السرعات المعممة، ومن ثم تعويض ذلك كله في المعادلة 46.10. ولكي نؤكد مدى شمول معادلات لاجرانج من النوع الثاني نحل بعض المسائل التي سبق حلها بطرق أخرى سالفة.

أسـئـلـةٌ مـحـلـولـةٌ